



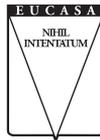
# CUADERNOS DE INGENIERÍA

PUBLICACIONES ACADÉMICAS

14

Nueva serie

Número XIV / diciembre, 2022



EDICIONES  
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA  
EUCASA

**UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA  
(UCASAL)**

**CUADERNOS DE INGENIERÍA**

**CONSEJO EDITORIAL**

**DIRECTORA:**

Dra. Ing. Lía Orosco | Jefa del Departamento de Investigación, Facultad de Ingeniería, UCASAL

**MIEMBROS:**

Ing. Néstor Eugenio Lesser | Decano de la Facultad de Ingeniería, UCASAL, Argentina

Ing. Joan Carles Olmedillas Hernández | Consultor, España

Dr. Ing. Jorge Eugenio Crempien Laboric | Universidad de Piura, Perú

Dr. José Germán Viramonte | CONICET, Argentina

Dr. en Ciencias Luis Antonio Olsina Santos | UNLP, Argentina

Dr. Ing. Giuseppe Quaranta | Sapienza Università di Roma, Italia.

Dr. Ing. Ramón González-Drigo | Universidad Politécnica de Cataluña, España.

**ADMINISTRADOR PORTAL CI**

Ing. Matías N. Amor | Departamento de Investigación/Extensión, UCASAL

**COMITÉ CIENTÍFICO**

Dr. Ing. Mario Roberto Arrieta Paternina | Universidad Nacional Autónoma de México

Mg. Lic. Edith Cámpora | Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Ing. Ana Haydeé di Ioro | Universidad FASTA, Mar del Plata, Argentina

Dr. Ing. Adolfo Escobar Ordóñez | Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín, Colombia

Dr. Ing. José González | Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina

Dr. Domingo Hernández Abreu | Universidad de La Laguna, España.

Dr. Ing. Jorge Crempien de la Carrera | Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

Dra. Ing. Sonia Vrech | Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Dr. Ing. Marcelo Pagnola | Universidad de Buenos Aires, Argentina

Dr. Manuel Muñoz Palma | Universidad de Sonora, México

Dr. Ing. Nicolás Amigo Ahumada | Universidad Mayor, Chile  
Ing. Rodrigo Iwas Pedraza, Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Dr. Ing. John Henao Penenrey, Universidad de Barcelona, España

Dr. Ing. Carlos Berejnoi | Universidad Nacional de Salta, Argentina

Dr. Ing. Carlos Casanova | Universidad Tecnológica Nacional- FRUC, Argentina

Dr. Ing. Hugo Gregorio | Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina

Dr. Andrzej Kijko | Universidad de Pretoria, Sudáfrica

Esp. Lic. Julio César Liporace | Universidad de la Defensa Nacional, Buenos Aires, Argentina

Mg. Ing. Mario Raitelli | Universidad Nacional de Tucumán, Argentina

Dr. Ing. Hernán Santa María Oyadel | Pontificia Universidad Católica de Chile

Dra. Silvana Karina Valdez | Universidad Nacional de Salta, Argentina

Dr. Ing. Petrus Johannes Vermeulen | Philippines

Dr. Ing. Vladimir J. Alarcón-Calderón | Northern Gulf Institute, Universidad de Mississippi, Estados Unidos.

Dr. Ing. Raúl Bertero | Universidad Nacional de Buenos Aires, Argentina

Dr. Ing. Oscar Möller | Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Dr. Ing. Carlos Gastón Catalini | Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Dra. Ing. Mercedes Ruiz Carreira | Universidad de Cádiz, España.

Dr. Ing. Diego Alberto Godoy | Universidad Gastón Dachary, Argentina

Ing. Luis Perna | Universidad Tecnológica Nacional, Regional Delta, Argentina

e-ISSN 2545-7012

ISSN 2545-692X (hasta el núm. 10 - 2018, la revista se publicó en soporte papel)

Domicilio editorial: Campus Universitario Castañares - 4400 Salta - Argentina

Tel.: (54-387) 426 8607 | e-mail: [cuadernosdeingenieria@ucasal.edu.ar](mailto:cuadernosdeingenieria@ucasal.edu.ar)

web: <http://revistas.ucasal.edu.ar/index.php/CI> | [www.ucasal.edu.ar/eucasal](http://www.ucasal.edu.ar/eucasal)

Imagen de tapa:  
Boceto. Leonardo da Vinci (1452-1519)

# CUADERNOS DE INGENIERÍA

Nueva serie

Publicaciones Académicas

14 | 2022



EDICIONES  
UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA  
SALTA - ARGENTINA

*Cuadernos de Ingeniería* es una publicación científica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Salta publicada bajo el sello EUCASA (Ediciones Universidad Católica de Salta). Es una revista de periodicidad anual, que contiene artículos científicos (productos de investigaciones científicas y desarrollos tecnológicos – I+D), de revisión, ensayos y reseñas de libros, todos de carácter original, sobre temas relacionados con el campo disciplinar de la ingeniería en todas sus ramas. Es una revista de acceso abierto publicada bajo licencia Creative Commons Atribución–NoComercial–CompartirIgual. Los autores retienen, sin embargo, el derecho a ser adecuadamente citados. Todos los artículos recibidos son objeto de evaluación. La responsabilidad sobre el respeto a la propiedad intelectual corresponde a los autores. Los *Cuadernos de Ingeniería* han sido incorporados al Catálogo Latindex (Sistema Regional de Información para las Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal), versión 2.0 - Folio 22986.

*Cuadernos de Ingeniería is a scientific journal published by Universidad Católica de Salta, Argentina. It has been printed by EUCASA (Ediciones Universidad Católica de Salta – Universidad Católica de Salta Editions). This annual publication contains scientific and technological development articles, review papers, essays and book reviews on topics related to the wide field of engineering sciences. Cuadernos de Ingeniería is Open Access published under Creative Commons licence Attribution-NonCommercial-Share Alike. All papers received are submitted to peer evaluation before their publication. Authors are responsible for compliance with copyright laws. Cuadernos de Ingeniería has been incorporated to the LATINDEX Catalog (Regional Information System for Scientific Publications from Latin America, the Caribbean, Spain and Portugal), version 2.0 - Folio 22986.*

## SUMARIO

Editorial	
Rosanna Caramella y Lía Orosco .....	5
Determinación de parámetros para la conformación en caliente de una aleación metálica amorfa base Fe	
<i>Determination of parameters for hot forming of an amorphous Fe based metal alloy</i>	
Javier Alberto Moya y Carlos Berejnoi .....	7
Avances en las aleaciones magnéticas blandas	
<i>Advances in soft magnetic alloys</i>	
Diego Lisandro Rincón .....	17
Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge- Kutta	
<i>Global error behavior analysis in the explicit Runge-Kutta methods</i>	
Carlos Marcelo Albarracín y María Virginia Quintana .....	35
Caudales de diseño en cuencas de la Provincia de Salta.	
<i>Design flow discharges in basins of the province of Salta</i>	
Cecilia Botelli, Nicolás Guillén y Matías Eder .....	51
The quartile functions for the Generalized Gutenberg-Richter distribution	
<i>Funciones de cuartiles para la función distribución generalizada de Gutenberg-Richter</i>	
Mika Haarala y Petrus Vermeulen .....	91



## EDITORIAL

Con gran orgullo, nos toca saludar la aparición de un nuevo ejemplar de los *Cuadernos de Ingeniería*. Esta vez, el número 14.

Hablar del volumen 14 de una revista especializada implica no solo un número, significa un gran esfuerzo por parte de los responsables a través de los años para darle continuidad, saber convocar a los estudiosos e interesarlos en la publicación, revisar permanentemente criterios y normas de edición e indexación para mantener ajustado el producto a lo que la comunidad científica espera de él; interesar también a esa comunidad científica para que se sume, no solo en la escritura, sino, y más aún, en la revisión de los escritos, de modo de garantizar la calidad que se busca. Es también un estado de alerta permanente para saber captar la esencia de cada tema o línea que se investiga, de modo de poder evaluar con justeza su calidad, pertinencia, importancia en el contexto en que se encuadra, de modo de acoger contenidos y perspectivas que constituyan verdaderos aportes al estado del arte o de los estudios que se realizan dentro de cada especialidad.

Eso hacia afuera, pero en lo que no se ve, en la cocina de la publicación, significa también poder conformar buenos equipos de trabajo, poder incluirse en otros más amplios aún; en el caso de las publicaciones científicas de la Universidad Católica de Salta, significa formar parte de un nutrido y exquisito —tanto por el aspecto humano como profesional— conjunto de personas que ponen su conocimiento, entusiasmo y responsabilidad al servicio de la comunicación de la ciencia, nada más y nada menos.

En cuanto a su contenido, este número reúne dos artículos del campo de la Ingeniería de Materiales, los que ahondan en avances de aleaciones magnéticas blandas; en el primero, Rincón realiza una revisión sobre lo publicado en los últimos tres años sobre el tema, lo que permite visualizar metas de investigación en el corto y mediano plazo. En el otro artículo, Moya y Berejnoi reportan parámetros fundamentales para la conformación de vidrios metálicos, obtenidos experimentalmente mediante un equipo desarrollado por el grupo de trabajo, capaz de inducir tratamientos térmicos con aplicación de cargas mecánicas en la probeta.

Por su parte, Albarracín y Quintana analizan el comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge Kutta, ampliamente aplicados en el campo de la ingeniería.

Indudablemente que los fenómenos naturales implican amenazas al medio habitado, por lo que dos artículos encaran esta problemática: Botelli, Guillén y Eder presentan el cálculo de caudales e hidrogramas de diseño en diferentes cuencas de interés de la provincia de Salta; los resultados alcanzados son fundamentales para proyectar obras de infraestructura destinadas a mitigar el riesgo hídrico. En el otro artículo, Haarala y Vermeulen desarrollan funciones de densidad de cuartiles para la función de Gutenberg-Richter Generalizada, de gran importancia para estudios de peligrosidad sísmica.

Esperamos que la lectura de estos textos sea de interés para estudiosos de los distintos campos de la Ingeniería e invitamos a los investigadores a comunicarse con nosotros a través de nuestro portal (<http://revistas.ucasal.edu.ar/index.php/CI>), así como a hacernos llegar sus trabajos para su publicación.

*Rosanna Caramella, Lía Orosco, editoras  
Diciembre, 2022*

## Determinación de parámetros para la conformación en caliente de una aleación metálica amorfa base Fe

### Determination of parameters for hot forming of an amorphous Fe-based metal alloy

Javier Alberto Moya<sup>1</sup>, Carlos Berejnoi<sup>2</sup>

---

*Ingeniería de materiales/ artículo científico*

Citar: Moya J. L. y Berejnoi C. (2022). Determinación de parámetros para la conformación en caliente de una aleación metálica amorfa base Fe. *Cuadernos de Ingeniería* (14). <http://revistas.ucasal.edu.ar>

Recibido: septiembre/2022

Aceptado: noviembre/2022

#### Resumen

Los vidrios metálicos pueden conformarse plásticamente arriba de la temperatura de transición vítrea, en la región denominada del líquido sobreenfriado, y evitando la cristalización del material. Dicha cristalización está determinada no solamente por la temperatura de trabajo, sino también por el tiempo de duración del proceso. Por ello, resulta de mucho interés tecnológico poder caracterizar temperaturas, tiempos y tensiones para ser empleados como parámetros en la conformación. En este trabajo se presentan resultados de valores de viscosidades, tensiones y tiempos alrededor de la temperatura de transición vítrea, obtenidos en una aleación amorfa sintetizada en el laboratorio de los autores, de composición química  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{75}\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}]_{96}\text{Nb}_4$  (at. %). Para ello se usó un equipo desarrollado por los autores, capaz de inducir tratamientos térmicos con aplicación de cargas mecánicas en la probeta. Simultáneamente se monitoreó la temperatura, la elongación y la resistencia eléctrica de la muestra. Los resultados revelan una temperatura de transición flujoviscosa de  $T_{vs} = 485$  °C, con posibilidad de deformar plásticamente hasta los 550 °C manteniendo cierto control sin que la cristalización ocurra. La viscosidad de la aleación varía entre  $\eta = 10^8$  y  $10^{12}$  Pa s, dependiendo de la velocidad de calentamiento, del tiempo en temperatura y de la carga del ensayo. Novedosos experimentos en donde por primera vez se realiza la determinación de la viscosidad mediante sucesivos ensayos isotérmicos escalonados son también presentados.

---

<sup>1</sup> Universidad Católica de Salta, Salta, Argentina.

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.

**Palabras clave:** aleaciones metálicas amorfas, temperatura de transición vítrea, viscosidad.

### Abstract

Metallic glasses can be thermoplastically formed above the glass transition temperature, in the region known as the supercooled liquid, and avoiding the crystallization of the material. This crystallization is determined not only by the working temperature but also by the time interval of the process. Therefore, is of great technological interest to be able to properly characterize temperatures, times, and stresses to be used as parameters in the forming process.

In this work we present results of viscosities, stresses and time values around the glass transition temperature, obtained in an amorphous alloy synthesized in the laboratory of the authors, of chemical composition  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{75}]\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}\}_{96}\text{Nb}_4$  (at.%). For this purpose, an experimental equipment devel-

oped by the authors was used, capable of inducing heat treatments with the application of mechanical loads on the specimen. Simultaneously, the temperature, elongation and electrical resistance of the sample were monitored. The results show a viscous flow transition temperature of  $T_{\text{vs}} = 485$  ° C, with the possibility of thermoplastic deformation up to 550 °C, while maintaining a certain control without crystallization occurring. The viscosity of the alloy varies between  $\eta = 10^8$  and  $10^{12}$  Pa s, depending on heating rate, time at temperature and test load. Novel stepped isothermal experiments where the determination of the viscosity is carried out by means of successive staggered isothermal tests are also presented.

**Keywords:** amorphous metallic alloys, glass transition temperature, viscosity.

## 1. Introducción

Una de las particularidades de las aleaciones metálicas amorfas (o vidrios metálicos) es que presentan resistencias mecánicas más elevadas respecto a las aleaciones cristalinas, principalmente debido a la ausencia de sistemas de deslizamientos característicos de los cristales. A temperatura ambiente, la deformación plástica suele ser escasa o prácticamente nula.

Como toda estructura vítrea, los vidrios metálicos poseen una temperatura de transición vítrea,  $T_g$ , en donde la aleación líquida sobreenfriada se convierte en un sólido amorfo. Esta temperatura puede ser determinada experimentalmente durante el proceso de calentamiento de la aleación, aunque en muchas aleaciones metálicas ocurre antes la cristalización con su correspondiente temperatura,  $T_x$ , dejando de ser un sólido amorfo. El rango de temperaturas que abarca la región de líquido sobreenfriado,  $\Delta T = T_x - T_g$ , es un parámetro importante para la conformación plástica en caliente de los vidrios metálicos, ya que trae implícita la estabilidad térmica de la aleación durante el conformado plástico, es decir, el rango de temperaturas a la que el material puede ser sometido sin que pierda su propiedad de amorfo, sin que sobrevenga la cristalización. Por otra parte, se utiliza el parámetro de la viscosidad,  $\eta$ , para evaluar la capacidad de deformación plástica. Por convención, un líquido alcanza este estado con un valor de viscosidad de  $\eta = 10^{12}$  Pa s (cuando el material es calentado a un ritmo de 10 °C/min) (Sastry, 2001). Sin embargo, en las aleaciones metálicas amorfas, que necesitan grandes velocidades de enfriamiento para inhibir la cristalización, la viscosidad a la que se alcanza  $T_g$  suele ser menor, más cercana al valor de  $10^{11}$  o  $10^{10}$  Pa s (Liebermann, 1993).

Entre las aleaciones amorfas base Fe, la aleación de composición química  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{75}]\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}\}_{96}\text{Nb}_4$  (at.%) ha sido estudiada parcialmente en la literatura (Inoue et al., 2006; Shen et al., 2007a; Shen et al., 2007b) y caracterizada estructural, magnética y mecánicamente. Esta última propiedad es una de sus características más notables, ya que su resistencia mecánica es de 4275 MPa (con una deformación plástica de  $\varepsilon = 0.3\%$  a temperatura ambiente) compartiendo el podio de las aleaciones base Fe de ultra alta resistencia. Sin embargo, no se han encontrado datos publicados sobre su capacidad de deformación plástica en temperatura.

En este trabajo se han realizado por primera vez estudios de viscosidades en una aleación amorfa  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{75}]\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}\}_{96}\text{Nb}_4$  utilizando un prototipo de equipo construido en el laboratorio de los autores. Dicho equipamiento tiene la capacidad de inducir tratamientos térmicos y tensiones mecánicas sobre muestras metálicas en forma de cintas, hilos o alambres, monitoreando simultáneamente su deformación y su resistencia eléctrica, junto con el control de su temperatura.

## 2. Desarrollo

### 2.1. Experimental

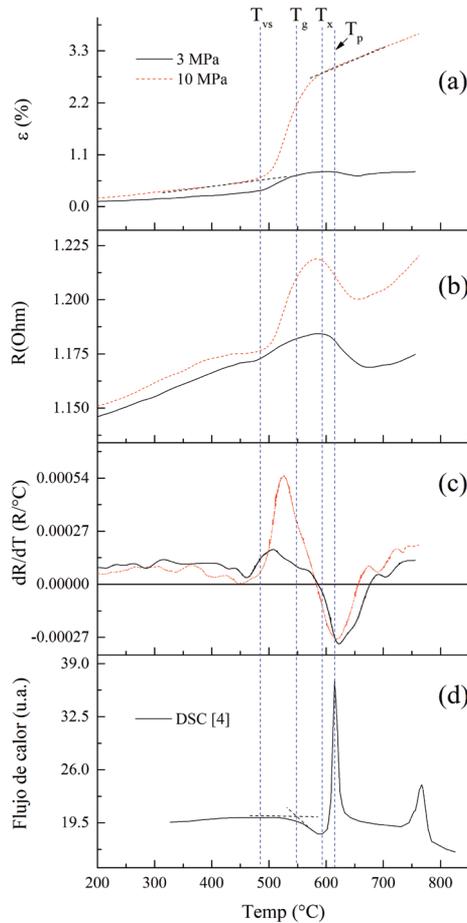
La aleación  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{75}]\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}\}_{96}\text{Nb}_4$  fue sintetizada a partir de elementos puros (pureza mayor a 99,9 %, en todos los elementos) en un horno de inducción bajo atmósfera de Ar y enfriada rápidamente empleando la técnica de *melt-spinning*. Las cintas así producidas tuvieron un ancho de 0.8 mm y un espesor de entre 25 y 30  $\mu\text{m}$ . La condición de amorfa fue evaluada con difracción de rayos-X (Bruker, D2 Phaser con radiación de Co).

Las muestras utilizadas fueron de 15 mm de largo y fueron sometidas a recocidos a distintas velocidades de calentamiento (de 40 °C/min hasta 1000 °C/min) e isotérmicos, empleando distintas cargas mecánicas (de 3 MPa hasta 25 MPa).

El equipo utilizado para realizar los recocidos y monitorear los cambios de longitud y de resistencia eléctrica de la muestra es una versión del equipo presentado en la obra de Moya (2015), y mejorado en otra obra del mismo autor (Moya et al., 2019), actualmente con nuevas implementaciones y adaptado a estos estudios. El principio de calentamiento se basa en el efecto Joule sobre la muestra misma, por lo que se tiene una muy baja inercia térmica, mientras que la temperatura es monitoreada con un pirómetro vía un controlador PID lo que permite un rápido control (lamentablemente, no es posible dar más detalles del equipo, ya que se encuentra en proceso una solicitud de protección de propiedad intelectual).

### 2.2 Resultados y discusión

La Figura 1(a-c) muestra, respectivamente, los resultados obtenidos de elongación específica,  $\varepsilon = \Delta L/L_0$ , de resistencia eléctrica,  $R$ , y la derivada de la resistencia respecto de la temperatura,  $\delta R/\delta T$ , sobre tres muestras con distintas cargas. En la Fig. 1 (d) se ha reproducido el ensayo de calorimetría diferencial de barrido, DSC, de Shen, Chang, Zhang e Inoue (2007) sobre una aleación de idéntica composición química, a modo de comparación.

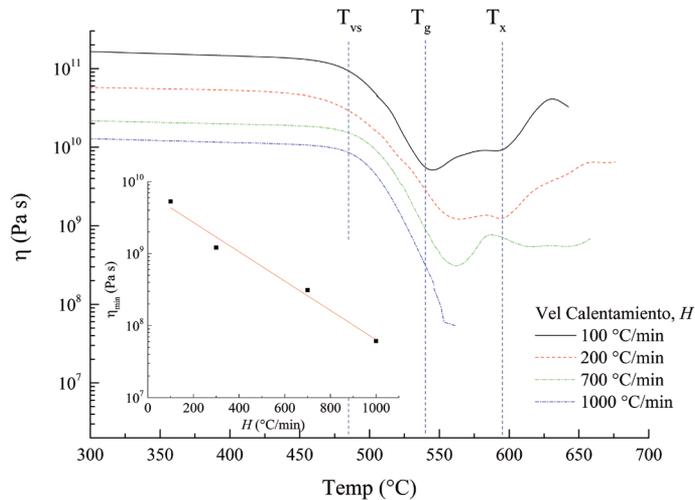


**Figura 1.** Variación de (a) deformación  $\epsilon$ , (b) resistencia eléctrica  $R$ , y (c) su derivada  $\delta R/\delta T$  para dos muestras con distintas cargas y (d) ensayo de DSC [4].

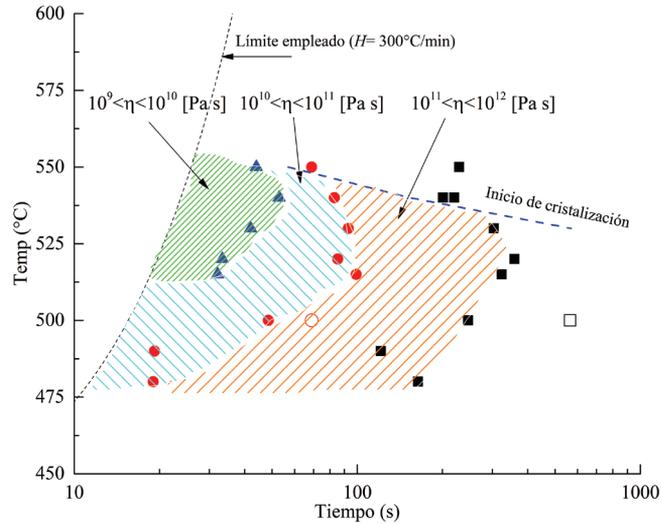
La  $T_g$  obtenida por la técnica de DSC (Shen et al., 2007b), es de  $T_g = 540$  °C; mientras que en los presentes ensayos de dilatometría con carga se ha obtenido que el material comienza la deformación plástica hacia los 485 °C. Las temperaturas de inicio,  $T_x$ , y pico,  $T_p$ , de cristalización determinadas por las técnicas de dilatometría y de resistencia eléctrica coinciden con las obtenidas con DSC en Shen et al. (2007b). Esta diferencia entre la  $T_g$  determinada por dilatometría y la determinada por calorimetría ha sido ya observada por otros autores (Myung et al, 1991a). En algunos casos, la  $T_g$  obtenida por el ensayo de carga mecánica es denominada “temperatura de inicio de flujo viscoso”,  $T_{vs}$ , (Myung, 1991b) y mientras que a la obtenida por calorimetría suelen confirmarla llamándola “temperatura de transición vítrea calorimétrica”.

Lo que está claro es que la  $T_g$  caracterizada por DSC no siempre corresponde al inicio del proceso de deformación viscoso y, como consecuencia, conocer el  $\Delta T_x$  a partir de esas medidas puede ser insuficiente para caracterizar la deformabilidad de un vidrio metálico (Bochtler et al., 2020). De hecho, en la presente aleación, el rango de deformación flujoviscosa es de unos 105 °C mientras que el  $\Delta T_x$  reportado en Shen et al. (2007a) es de 65 °C.

El comportamiento de la viscosidad,  $\eta$ , con la velocidad de calentamiento,  $H$ , es presentada en la Figura 2, para  $H= 100, 300, 700$  y  $1000$  °C/min, realizadas con una carga inicial de  $\sigma= 7$  MPa. La viscosidad fue calculada de acuerdo con la fórmula  $\eta= \sigma/3 \dot{\epsilon}$ , en donde  $\sigma$  es la tensión aplicada y  $\dot{\epsilon} = \epsilon/dt$  es la velocidad de deformación (Bhatti y Cantor, 1988). En la gráfica se puede observar que la aleación muestra una viscosidad más o menos constante con la temperatura hasta alcanzar  $T_{vs}$ , temperatura a partir de la cual  $\eta$  desciende bruscamente, presentando un mínimo antes de alcanzar la temperatura de cristalización. El valor mínimo de las curvas de  $\eta$  en la Figura 2 se encuentra en temperaturas cercanas al valor de  $T_g$  que se había determinado a 40 °C/min (indicado ahora también en la Figura 2). En la Figura 2 inserta se grafica el comportamiento de este  $\eta_{min}$  en función de la velocidad de calentamiento, habiendo alcanzado valores por debajo de  $10^8$  Pa s para  $H= 1000$  °C/min. Lamentablemente, a esta velocidad de calentamiento la aleación no resiste la velocidad de deformación con la tensión aplicada, que alcanza unos 0.1 mm/s, y se fractura luego de una deformación de  $\epsilon= 5$  %.



**Figura 2.** Comportamiento de la viscosidad,  $\eta$ , con distintas velocidades de calentamiento,  $H$ . Gráfico Inserto: Variación del  $\eta_{min}$  en función de  $H$ .



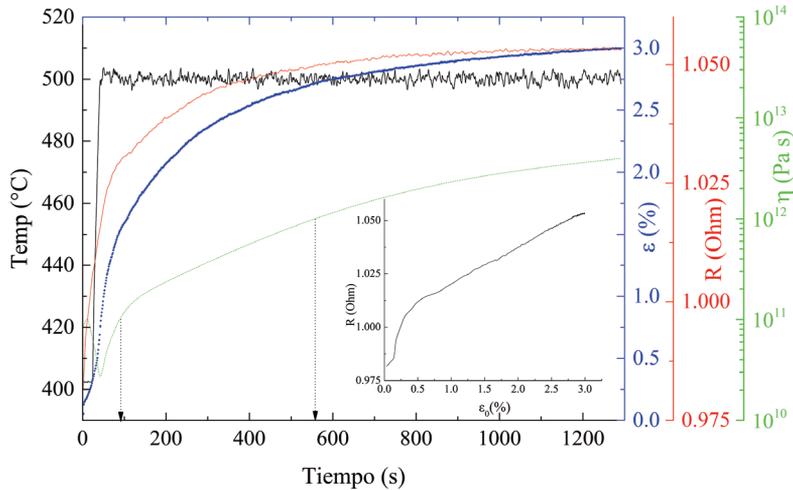
**Figura 3.** Diagrama isotérmico TTT dividido en regiones de distintas viscosidades,  $\eta$ . Los símbolos llenos indican los límites de  $\eta$  para una carga de  $\sigma = 15$  MPa, mientras que los dos símbolos vacíos pertenecen a un experimento con carga de 25 MPa.

En la Figura 3 se ha graficado, en un diagrama de TTT, regiones de distintas viscosidades obtenidas de los tratamientos isotérmicos en muestras sometidas a una carga inicial de  $\sigma = 15$  MPa. Se ha dividido el gráfico en tres regiones, una con valores de  $10^9 < \eta < 10^{10}$  Pa s, otra con valores de  $10^{10} < \eta < 10^{11}$  Pa s, y la tercera, para tiempos finales, con  $10^{11} < \eta < 10^{12}$  Pa s, (siguiendo la convención, se usa como límite  $\eta = 10^{12}$  Pa s). La velocidad de calentamiento empleada para llegar a la temperatura del tratamiento fue de 300 °C/min, y constituye el límite en la escala de tiempos iniciales (marcado en la figura con una línea de puntos). La parte superior de las regiones graficadas está limitada por el inicio de la cristalización, indicado con una línea de puntos. La cristalización es detectada a partir del descenso del valor de la resistencia eléctrica o del cambio de comportamiento de la relación entre  $R$  y  $\varepsilon$  (como se verá más adelante).

Como se puede observar, la región más apta para una conformación en caliente está confinada entre los 510 y los 550 °C y, en el caso de optar por los 550 °C, se tiene aproximadamente 50 s antes de que la cristalización se inicie. Por otro lado, entre los 485 y los 520 °C, es también posible la deformación plástica, aunque en menor medida debido a la alta viscosidad de la aleación en los rangos bajos de temperaturas, pero teniendo la ventaja de que los tiempos de permanencia en temperatura pueden superar los 1000 s y el material continuar amorfo.

Se ha observado en la literatura que, en vidrios metálicos, la viscosidad puede depender de la tensión aplicada durante el ensayo, al menos en valores por debajo de los 50 MPa. (Bhatti y Cantor, 1988). Para observar la presencia de este efecto, se ha realizado un ensayo isotérmico bajo las

condiciones de  $\sigma = 25$  MPa y  $T_a = 500$  °C (con la presente instrumentación, circunstancialmente, no se puede aplicar más de 25 MPa).

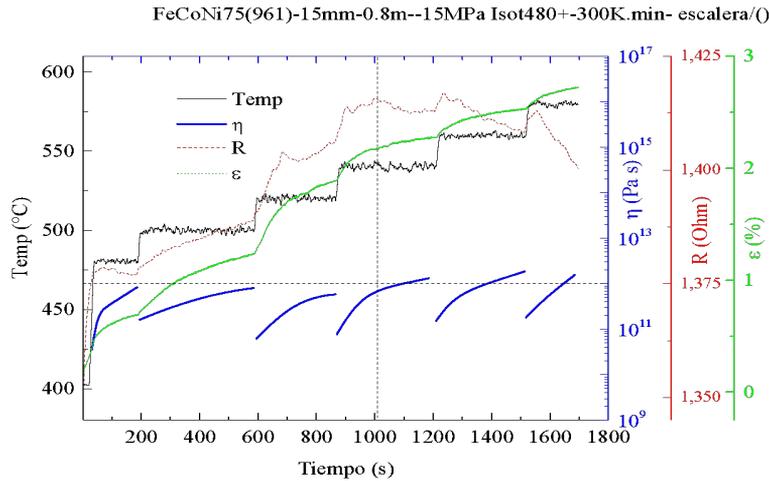


**Figura 4.** Comportamiento de  $\epsilon$ ,  $R$ , y  $\eta$  en un ensayo con  $\sigma = 25$  MPa. Gráfico inserto: relación  $R(\epsilon)$ .

Los resultados son presentados en la Figura 4, donde se puede observar que, efectivamente, las regiones con posibilidad de deformación plástica se extienden sensiblemente en el tiempo, como puede observarse en la Figura 3. Tal como se dijo anteriormente, este diagrama isotérmico TTT fue obtenido con tensiones de  $\sigma = 15$  MPa y allí mismo se indican, con símbolos vacíos, los valores de viscosidades y los tiempos obtenidos en la Figura 4 con  $\sigma = 25$  MPa, a modo de comparación. Luego de haber sometido la muestra a una carga de con  $\sigma = 25$  MPa en  $500$  °C durante un tiempo de  $t = 1300$  s, el material continúa amorfo (no se observa una disminución de la resistencia eléctrica) y la deformación plástica continúa, aunque a un ritmo mucho más lento (con una velocidad de  $3 \times 10^{-5}$  mm/s). En el gráfico inserto, se muestra la variación de  $R(\epsilon)$  en donde se puede observar que, luego de un transitorio, la resistencia se comporta linealmente con la elongación no mostrando signos de algún cambio de fase, aunque hacia el final del experimento pareciera existir una tendencia a la disminución de la pendiente (que podrían indicar el lento comienzo hacia una cristalización).

El comportamiento, antes mencionado, en el cual la velocidad de deformación disminuye con el tiempo, es típico en los vidrios metálicos y contrario a lo que sucede en los sistemas cristalinos, en los que el comportamiento común suele ser que la velocidad de deformación se mantenga constante o bien se incremente (etapas II y III del fenómeno de *creep*). Durante el ensayo de *creep* de los vidrios metálicos, estos experimentan el fenómeno de relajación estructural durante el cual se va eliminando volumen libre, y densificando el material con el correspondiente incremento de su resistencia mecánica. Y, al estar en equilibrio metaestable, para cada temperatura existirá un proceso de relajación estructural con su correspondiente variación de la viscosidad. Este fenóme-

no se puede observar en la Figura 5, en donde se muestran una serie de tratamientos isotérmicos consecutivos a partir de los 480 °C y el incremento de la temperatura rápidamente en 20 °C cada vez que la viscosidad alcanzaba aproximadamente el valor de  $\eta = 10^{12}$  Pa s.



**Figura 5.** Ensayos isotérmicos escalonados ( $\sigma = 15$  MPa).

De acuerdo con los datos de la resistencia eléctrica, la aleación comenzaría a cristalizar hacia los 1000 s de comenzado el experimento, estando la muestra a 540 °C, un lapso de tiempo, siempre debajo de los  $\eta = 10^{12}$  Pa s, no logrado en los tratamientos isotérmicos de la Figura 4. Asimismo, en este tipo de experimento se puede observar que el régimen a 520 °C es en donde se produce la mayor deformación plástica.

### 3. Conclusiones

Se ha estudiado la aptitud de la aleación amorfa  $\{[(\text{Fe}_{0.6}\text{Co}_{0.3}\text{Ni}_{0.1})_{0.75}\text{B}_{0.2}\text{Si}_{0.05}]_{96}\text{Nb}_4$  para su conformación plástica en temperatura. Con la máxima velocidad de calentamiento empleada de 1000 °C/s se han obtenido los menores valores de viscosidad resultado en  $\eta < 10^8$  Pa s; pero, a esas velocidades de calentamiento, la velocidad de deformación debe ser limitada ( $< 0.1$  mm/s).

En el régimen isotérmico, la viscosidad se limita a valores  $\eta > 10^9$  Pa s, siendo el rango de temperaturas más apto entre 510 y 550 °C durante un promedio de 50 s desde el inicio del calentamiento en las condiciones del experimento. Menores temperaturas y mayores tiempos son aún posibles, aunque con menor capacidad de deformación. También, con cargas mayores a 15 MPa, es posible incrementar la capacidad de deformación plástica de esta aleación. Con una carga de 25 MPa se ha incrementado un 38 % el tiempo de la región con  $10^{10} < \eta < 10^{11}$  Pa s y un ~130 % el tiempo de la de  $10^{11} < \eta < 10^{12}$  Pa s.

Finalmente, con el presente equipo que posee muy baja inercia térmica, se ha podido implementar un tipo de estudio novedoso a nuestro entender, como el que puede verse en la Figura 5, en

donde por medio de tratamientos isotérmicos escalonados se ha logrado incrementar notablemente el tiempo de viscosidad a valores  $\eta < 10^{12}$  Pa s, aunque la deformación total se vio disminuía en un 30 % respecto al tratamiento isotérmico realizado a 540 °C; se habría resignado cantidad de deformación por tiempo de deformación. Esto se estudiará con más detalle en futuras publicaciones.

## Referencias

- Bhatti, A. R., y Cantor, B. (1988). Viscous flow in amorphous Fe<sub>78</sub>B<sub>13</sub>Si<sub>9</sub> alloy. *Materials Science and Engineering*, 97, 479-482. [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(88\)90097-3](https://doi.org/10.1016/0025-5416(88)90097-3)
- Bochtler, B., Kruse, O., y Busch, R. (2020). Thermoplastic forming of amorphous metals. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 32(24), 244002. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/ab7ad7>
- Inoue, A., Shen, B. L., y Chang, C. T. (2006). Fe- and Co-based bulk glassy alloys with ultrahigh strength of over 4000MPa. *Intermetallics*, 14(8-9), 936-944. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2006.01.038>
- Liebermann, H. H. (Ed.). (1993). *Rapidly solidified alloys: Processes, structures, properties, applications*. M. Dekker.
- Moya, J. A. (2015). *Método para el estudio de la evolución de las propiedades magnéticas y estructurales de materiales magnéticos blandos amorfos y nanocristalinos y aparato que emplea dicho método* (IMPI Patent N.º 20150103324).
- Moya, J. A., Gamarra Caramella, S., y Berejnoi, C. (2019). Evolution of soft magnetic, mechanical and electrical properties measured simultaneously during annealing of rapidly solidified alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 476, 248-253. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.01.008>
- Myung, W.-N., Yang, S.-J., Kim, H.-G., y Masumoto, T. (1991a). Glass transition and viscous flow behavior of amorphous Fe-M-P (M = Cr, V or Mo) alloys. *Materials Science and Engineering: A*, 133, 418-422. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90100-2](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90100-2)
- Myung, W.-N., Yang, S.-J., Kim, H.-G., Lee, J.-B., y Masumoto, T. (1991b). Crystallization characteristics and viscous flow behavior of WC/amorphous Ni<sub>73</sub>Si<sub>10</sub>B<sub>17</sub> metal matrix composites. *Materials Science and Engineering: A*, 133, 513-517. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90122-4](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90122-4)
- Sastry, S. (2001). The relationship between fragility, configurational entropy and the potential energy landscape of glass-forming liquids. *Nature*, 409(6817), 164-167. <https://doi.org/10.1038/35051524>
- Shen, B., Chang, C., e Inoue, A. (2007a). Formation, ductile deformation behavior and softmagnetic properties of (Fe,Co,Ni)-B-Si-Nb bulk glassy alloys. *Intermetallics*, 15(1), 9-16. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2005.11.037>
- Shen, B., Chang, C., Zhang, Z., e Inoue, A. (2007b). Enhancement of glass-forming ability of Fe-CoNiBSiNb bulk glassy alloys with superhigh strength and good softmagnetic properties. *Journal of Applied Physics*, 102(2), 023515. <https://doi.org/10.1063/1.2757013>

### **Javier Alberto Moya**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniero mecánico y doctor en Ingeniería (ambos títulos otorgados por la FI-UBA). Director del grupo de Materiales Avanzados de la Facultad de Ingeniería (UCASAL). Campos de conocimiento: aleaciones metálicas y aleaciones magnéticas blandas. Aleaciones metálicas amorfas y nanocristalinas. Propiedades mecánicas, estructurales, magnéticas. Conocimiento en técnicas de magnetometría, análisis térmico, difracción de rayos X y espectroscopía Mossbauer.

Correo electrónico: [jmoya@ucasal.edu.ar](mailto:jmoya@ucasal.edu.ar)

Identificador ORCID: 0000-0001-8555-8983

### **Carlos Berejnoi**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniero metalúrgico y doctor en Ingeniería (Facultad de Ingeniería UNLP), y especialista en Entornos Virtuales de Aprendizaje (Organización de Estados Iberoamericanos). Profesor de Análisis Matemático I y Materiales (para Ingeniería Civil) en la Facultad de Ingeniería de la UNSa. Investigador en temas relacionados con la enseñanza de la Matemática y con Ciencia de Materiales: propiedades mecánicas de aleaciones mecánicas (cristalinas y amorfas) y estudio de la problemática de la transición dúctil frágil de aceros ferríticos.

Correo electrónico: [berejnoi@gmail.com](mailto:berejnoi@gmail.com)

Identificador ORCID: 0000-0001-8301-4579

## Avances en las aleaciones magnéticas blandas

### Advances in soft magnetic alloys

Diego Lisandro Rincón<sup>1</sup>

---

*Ingeniería de materiales/ artículo de  
revisión*

Citar: Rincón, D.L. (2022). Avances  
en las aleaciones magnéticas blandas.  
Cuadernos de Ingeniería (14). [http://  
revistas.ucasal.edu.ar](http://revistas.ucasal.edu.ar)

*Recibido: febrero/2022*

*Aceptado: diciembre/2022*

#### Resumen

El presente trabajo pretende dar una visión general de los avances de los últimos tres años en los materiales magnéticos blandos, con especial interés en las aleaciones ricas en contenido de Fe del tipo nanocrystalinas, y en algunos casos amorfas. Se hará foco en los tratamientos térmicos y en las velocidades de calentamiento, en la adición de componentes en la estructura de aleaciones magnéticas blandas, y en la composición de la matriz amorfa y los tamaños de grano.

Este estudio pone de manifiesto que la habilidad de formación vítrea (GFA) es una propiedad clave en la obtención de la aleación amorfa, y representa un inconveniente en el proceso de fabricación de aleaciones amorfas y nanocrystalinas. Además, métodos de tratamiento térmico como el calentamiento por efecto Joule (Joule Heating) abren nuevas posibilidades para la obtención de aleaciones magnéticas blandas nanocrystalinas. Se estudia, además, la evolución estructural de la aleación, dentro de los rangos del equipo JHS3 utilizado en este trabajo; por ello, las propiedades magnéticas reportadas son similares a las obtenidas en la literatura con otros tipos de equipamientos. Este método de trabajo también presenta medidas de resistencia eléctrica y dilatometría durante la evolución estructural de la aleación estudiada. Una buena opción es la familia Nanomet, que plantea nuevas configuraciones de recocido.

**Palabras clave:** materiales magnéticos blandos, aleaciones magnéticas blandas nanocrystalinas y amorfas, habilidad de formación vítrea.

---

<sup>1</sup> Universidad Católica de Salta

## Abstract

This work intends to give a general overview of the advances of the last three years in soft magnetic materials, with special interest in Fe-rich alloys of nanocrystalline type, and in some cases amorphous. Focus will be on heat treatments and heating rates, on the addition of components in the structure of soft magnetic alloys, and on amorphous matrix composition and grain sizes.

This study shows that the GFA glassforming ability is a key property in obtaining the amorphous alloy, and represents a drawback in the manufacturing process of amorphous and nanocrystalline alloys. In addition, heat treatment methods such as Joule Heating open new possibilities for obtaining nanocrystalline soft magnetic alloys. It allows the struc-

tural evolution of the alloy to be studied, provided that its variables remain within the equipment's ranges. The structural evolution of the alloy is also studied, within the ranges of the JHS3 equipment used in this work; therefore, the magnetic properties reported are similar to those obtained in the literature with other types of equipment. This working method also presents electrical resistance and dilatometry measurements during the structural evolution of the alloy under study. A good option is the Nanomet family, proposing new annealing configurations.

**Keywords:** soft magnetic materials, nanocrystalline and amorphous soft magnetic alloys, glass formation aptitude.

---

## 1. Introducción

Desde hace más de un siglo existe un gran interés científico y tecnológico por el desarrollo de los materiales magnéticos. A lo largo de estos años, las propiedades magnéticas blandas, de baja coercitividad y alta permeabilidad, se han mejorado progresivamente mediante la modificación de la composición o la estructura de las aleaciones ferromagnéticas (Muraca et al., 2009). De las múltiples aplicaciones de estos materiales, las más comunes son componentes de transformadores. El desarrollo de nuevas aleaciones para estos materiales busca mejoras en el ahorro de energía y amigabilidad para con el medioambiente.

La industria se enfoca en los materiales convencionales, los aceros al silicio grano orientado y grano no orientado (Azuma et al., 2020), siendo las aleaciones nanocristalinas de base Fe el material magnéticamente blando más importante con potencial para satisfacer estos requerimientos, durante su preparación y aplicaciones tecnológicas (Yú et al., 2020). La principal característica de una aleación magnéticamente blanda de buena prestación es tener un campo coercitivo  $H_c$  bajo, y una alta imanación de saturación  $M_s$ . De este modo, las aleaciones nanocristalinas presentan una estructura de una matriz amorfa con presencia de nanocristales, con tamaños menores a 60 nm. Normalmente la fase que precipita es  $\alpha$ -Fe o  $\alpha$ -Fe(Si) dependiendo de la composición de la aleación. A su vez, estas aleaciones presentan en su composición elementos que encarecen su fabricación, tales como el Nb. Es por ello que actualmente se buscan nuevos métodos para lograr este tipo de estructura, sustituyendo elementos costosos como el Nb por mayores porcentajes de Fe y estudiando la posibilidad de lograr esta estructura mediante el uso de tratamientos térmicos, aplicando diferentes tipos de técnicas.

Sin embargo, es importante investigar el mejoramiento de las propiedades magnéticas blandas de las aleaciones de base Fe, a fin de orientar teóricamente una producción industrial. (Yü et al., 2020). En el presente trabajo se hace una revisión de los últimos avances logrados en los últimos tres años en aleaciones magnéticas blandas nanocristalinas, se identifican las nuevas aleaciones planteadas y los métodos empleados para lograr estructuras nanocristalinas que ofrecen mejores prestaciones y mejoras en la eficiencia energética.

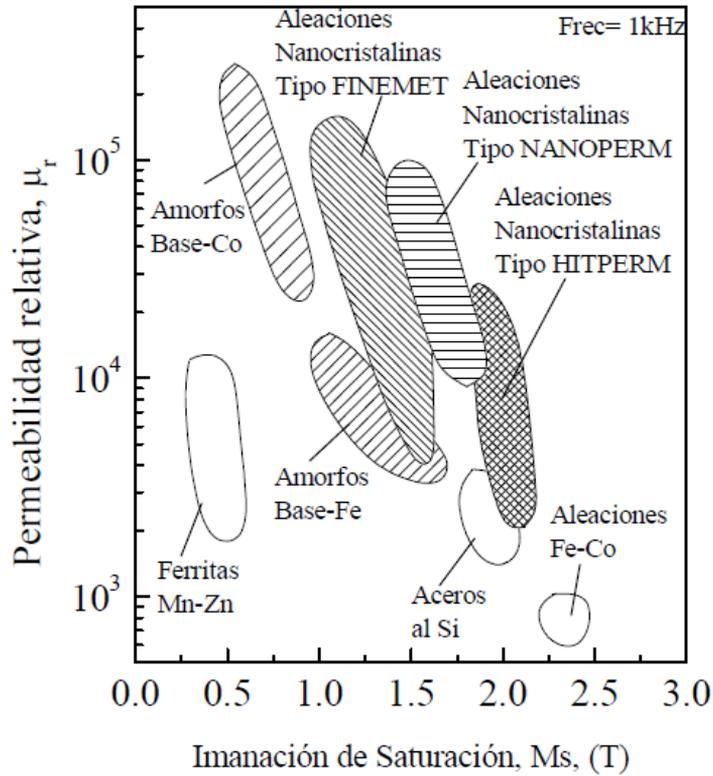
## 2. Aleaciones magnéticas blandas nanocristalinas y amorfas

Los materiales magnéticos blandos o de alta permeabilidad se definen como aquellos en los que se pueden producir cambios muy grandes en la densidad de flujo magnético por campos muy pequeños, a veces tan bajos como  $8 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$  (McCurrie, 1994). Normalmente se emplearon para estas aplicaciones materiales como aleaciones de Fe-Si, usado ampliamente en la construcción de transformadores. El desarrollo de estos materiales continuó con aleaciones amorfas, conocidas como vidrios metálicos; materiales que carecen de una estructura cristalina definida, y mejoran las prestaciones para este fin.

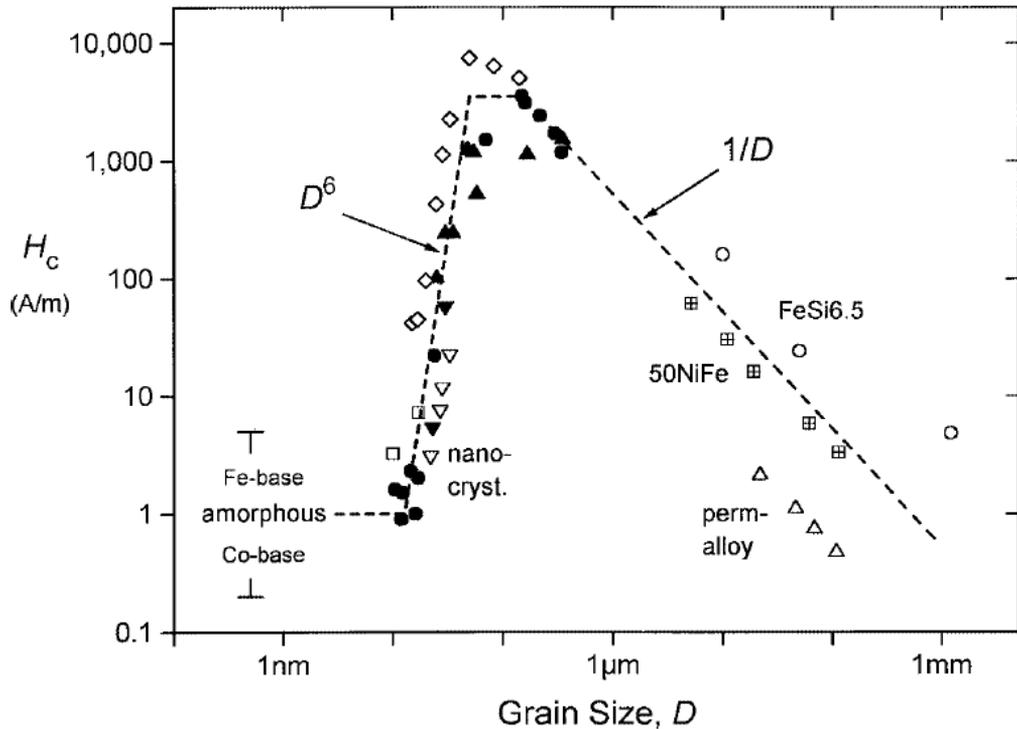
Según Herzer,

En 1988, Yoshizawa, Oguma y Yamauchi introdujeron una nueva clase de aleaciones a base de hierro que exhibían un comportamiento magnético blando superior. Las propiedades fueron una combinación única de bajas pérdidas, alta permeabilidad y magnetoestricción casi nula lograda por las aleaciones permanentes y las aleaciones amorfas a base de Co, pero con una magnetización de saturación de hasta 1.3 Tesla, mucho más alta que la que cualquiera de estos materiales puede ofrecer convencionalmente. Lo particular del nuevo material fue su microestructura ultrafina de b.c.c. Fe-Si con granulometrías de 1015 nm de donde se derivan finalmente sus propiedades blandas y que le dan el nombre de nanocristalino. (Herzer, 1997)

La Figura 1 muestra la relación entre la permeabilidad y la imanación de saturación de las principales familias de materiales magnéticamente blandos. Por su parte, en la Figura 2 —tomada de Herzer (1997)— se puede apreciar la relación del campo coercitivo en función del tamaño de grano, para aleaciones que van desde el estado amorfo, pasando por el nanocristalino y, finalmente, el estado cristalino.



**Figura 1.** Comparación de materiales magnéticos blandos tradicionales —indicados sin relleno— con los nuevos amorfos y nanocristalinos —regiones con distintos rellenos— (Makino et al., 1997).



**Figura 2.-** Coercitividad,  $H_c$ , frente al tamaño de grano,  $D$ , para varias aleaciones metálicas magnéticas blandas: ( $\blacktriangle$ ) Fe-Nb-Si-B (Herzer, 1990), ( $\bullet$ ) Fe-Cu-Nb-Si-B (Herzer et al., 1992), ( $\nabla$ ) Fe-Cu-V-Si-B (Sawa et al., 1990), ( $\square$ ) Fe-Zr-B (Suzuki et al., 1991), ( $\diamond$ ) Fe-Co-Zr (Guo et al., 1991) Aleaciones de NiFe ( $\triangle$ ,  $\boxplus$  (cuadrados centrados con +)) (Pfeifer et al., 1980) y Fe-Si ( $\circ$ ) (6,5% en peso) (Arai et al., 1984) (Herzer, 1997)

La amplia gama de materiales magnéticos blandos desarrollados con este objetivo puede clasificarse en tres familias: (i) cristalina: con orden de largo alcance, (ii) amorfa: con orden estructural de corto alcance, pero todavía con orden magnético de largo alcance y (iii) nanocristalina: nanocristales ferromagnéticos incrustados en una matriz amorfa ferromagnética con una longitud de correlación magnética mayor que el tamaño medio del grano (Muraca et al., 2009)

Actualmente, se pueden clasificar nueve grandes grupos de aleaciones magnéticamente blandas:

Para las aleaciones nanocristalinas:

- FINEMET Fe- Si- B- Nb- Cu
- HITPERM Fe- Co- B- Nb- Cu

- NANOPERM Fe- Nb- B- Cu- Zr
- NANOMET Fe- Si- B- P- Cu
- Fe- B- Si
- Fe- B- C

Para las aleaciones amorfas:

- Base Fe
- Base Fe- Ni
- Base Co.

Aunque se puede alcanzar fácilmente una alta magnetización de saturación ( $M_s$ ) en los materiales cristalinos convencionales, cuando se aumenta la concentración de Fe las propiedades magnéticas blandas empeoran debido a la alta anisotropía magnetocristalina de  $\alpha$ -Fe ( $K_1 = 47\text{kJ/m}^3$ ) (Muraca et al., 2009). Es por esto que se focalizará en materiales magnéticos blandos, amorfos y nanocristalinos, ricos en Fe, con porcentajes mayores al 80 % en su composición, dado que estas aleaciones presentan una mayor imanación de saturación a las de porcentajes menores. Además, el incremento del porcentaje de Fe reduce la cantidad de otros elementos presentes en estas, economizando estos elementos. Para estas familias de aleaciones, se analizarán los avances realizados en este campo en los últimos tres años.

### 3. Componentes en la estructura de aleaciones magnéticamente blandas

En la composición de una aleación nanocristalina podemos reconocer cuatro grupos de elementos que la componen. Reconocemos el porcentaje Fe, los elementos que propician la estructura vítrea o amorfa cuando la aleación es enfriada rápidamente, los elementos que impiden el crecimiento de grano y la formación de boruros Fe-B y los elementos que mejoran la nucleación. Si tomamos por ejemplo la aleación  $\text{Fe}_{84}\text{Cu}_1\text{Nb}_3\text{Si}_4\text{B}_8$ , reconocemos primeramente su porcentaje de Fe; asimismo, los elementos formadores de estructura amorfa como el Si, B y Nb, siendo el Nb el elemento que impide el crecimiento de granos y la formación de los boruros FeB. Además, reconocemos el Cu como el elemento que mejora la nucleación en este material.

El principal inconveniente en la producción de aleaciones magnéticas blandas es la producción de las aleaciones amorfas que posteriormente serán tratadas para obtener las aleaciones nanocristalinas. La prioridad en este punto es la habilidad para la formación vítrea de las aleaciones (GFA, por sus siglas en inglés). De este modo, la GFA se determina por los parámetros  $P_{HS} = \Delta H^C \cdot (\Delta S_\sigma / k_B)$  y  $P_{HSS} = \Delta H^C \cdot (\Delta S_\sigma / k_B) \cdot (\Delta S_C / R)$ , donde  $\Delta H^C$  es la entalpía de la mezcla química;  $\Delta S_\sigma / k_B$  es la entropía de discordancia y  $\Delta S_C / R$  es la entropía configuracional. La GFA se puede determinar cuantitativamente mediante el parámetro de capacidad de formación de vidrio PHS, que es el producto de la entalpía química  $\Delta H^C$  y la entropía de desajuste normalizada  $\Delta S_\sigma / k_B$ . Además, Ramakrishna Rao et al. (2013) propusieron un parámetro termodinámico PHSS para predecir la capacidad de formación de vidrio. El nuevo parámetro (PHSS) es  $P_{HSS} = \Delta H^C \cdot (\Delta S_\sigma / k_B) \cdot (\Delta S_C / R)$  (Zhang et

al., 2014). El PHSS combina todos los parámetros termodinámicos necesarios que influyen en el GFA en una sola cantidad y sus predicciones del GFA necesitan ser evaluadas en comparación con el PHS, así como con otros criterios del GFA (Rao et al., 2013)

El estudio de parámetros termodinámicos PHS y PHSS se toma como referencia para mejorar esta propiedad (Dastanpour et al., 2020b). La composición de los elementos seleccionados para la aleación será clave para determinar estas propiedades. Es por esto que se pueden predecir ciertos comportamientos en la GFA, de acuerdo con los componentes y composiciones que se agreguen a la aleación. Las principales aleaciones estudiadas en estos años fueron aleaciones de las familias Fe-Zr-B, las familias Nanomet, caracterizadas por los altos porcentajes de Fe mayores a 80 %.

Los últimos años se estudió la influencia del Cu sobre familia de aleaciones del tipo FeZrB. Estudios demuestran que la adición de Cu aumenta el intervalo de tratamiento térmico para aleación  $\text{Fe}_{80}\text{Zr}_9\text{B}_{10}\text{Cu}_1$ , llegando a valores de 154,7 °C. De este modo, se simplifica el proceso de cristalización, refinando los granos y aumentando la densidad numérica de los nanocristales  $\alpha$ -Fe. Además, se encuentra que el campo coercitivo  $H_c$  de estas familias de aleaciones difiere entre sí, esto se debe a sus complejos procesos de cristalización (Yu et al., 2020).

Las aleaciones de la familia Nanomet han tenido un número importante de estudios en los últimos años, los cuales se centran en tratamientos térmicos, como así también en la adición de nuevos elementos a esta aleación con la finalidad de mejorar determinadas propiedades magnéticas y de nucleación de nanocristales.

### ***Adición de Co, C y Mo en aleaciones del tipo Nanomet***

La sustitución de parte del porcentaje de Fe por Co, C y Mo tiene como finalidad mejorar la GFA mediante la mejora en los valores de los parámetros PHSS y PHS en las aleaciones del tipo Nanomet. Estudios realizados en la aleación Nanomet confirman que la sustitución simultánea de 4 % de Co, 1 % C y 1 % de Mo en lugar de Fe mejoró el parámetro PHSS de  $-2,04 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  a  $-4,83 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (Dastanpour et al., 2020b).

Se estimaron los valores de  $\Delta H^C$ ,  $\Delta S_\sigma/k_B$ ,  $\Delta S_C/R$ , PHS y PHSS del Co-C-Mo y se comprobó que eran inferiores a los de cualquier otra sustitución verificada. Los valores (negativos) de PHS y PHSS para la aleación Co-C-Mo fueron al menos 2 veces mayores que para Nanomet, lo que sugiere la mayor GFA entre las aleaciones sustituidas (Dastanpour et al., 2020b)

La mejora del GFA se verificó como una tasa de enfriamiento crítico claramente reducida. Esta investigación puede seguir optimizándose, pero el presente resultado demuestra que es posible mejorar significativamente el GFA de este sistema, y confirma la importancia de los PHSS y PHS para el diseño de la composición. Dastanpour y su equipo afirman, en su investigación, que estos valores pueden seguir mejorándose y sugieren también optimizar otros sistemas de aleaciones siguiendo la misma estrategia.

### ***Adición de P en aleaciones del tipo Nanomet***

Agregar P a aleaciones del tipo Nanomet afecta la GFA. Para porcentajes menores a 1 % de P esta propiedad aumenta, la pérdida de núcleo disminuye gradualmente y la permeabilidad aumenta. La adición de porcentajes de P entre 1 y 2,5 % produce una disminución rápida de la GFA, esto se refleja en el crecimiento de los granos, en el aumento rápido de campo coercitivo y en la pérdida de núcleo (Zhang et al., 2020). Para aleaciones del tipo  $(\text{Fe}_{80}\text{Si}_8\text{B}_6\text{Nb}_5\text{Cu})_{99}\text{P}$  se obtienen valores de permeabilidad de 75,93 A/m, incrementando este valor en un 5 %; además, las pérdidas en el núcleo disminuyen un 14 % con respecto a la aleación Nanomet sin adición de P.

El valor de  $\mu_e$  disminuye con el aumento de la frecuencia del campo magnético porque el mayor contenido de P aumenta  $H_c$ , y el dominio magnético con alta coercitividad es más fácil de relajar a alta frecuencia (Zhang et al., 2020).

### ***Adición de Ni y Mo en aleaciones del tipo Nanomet***

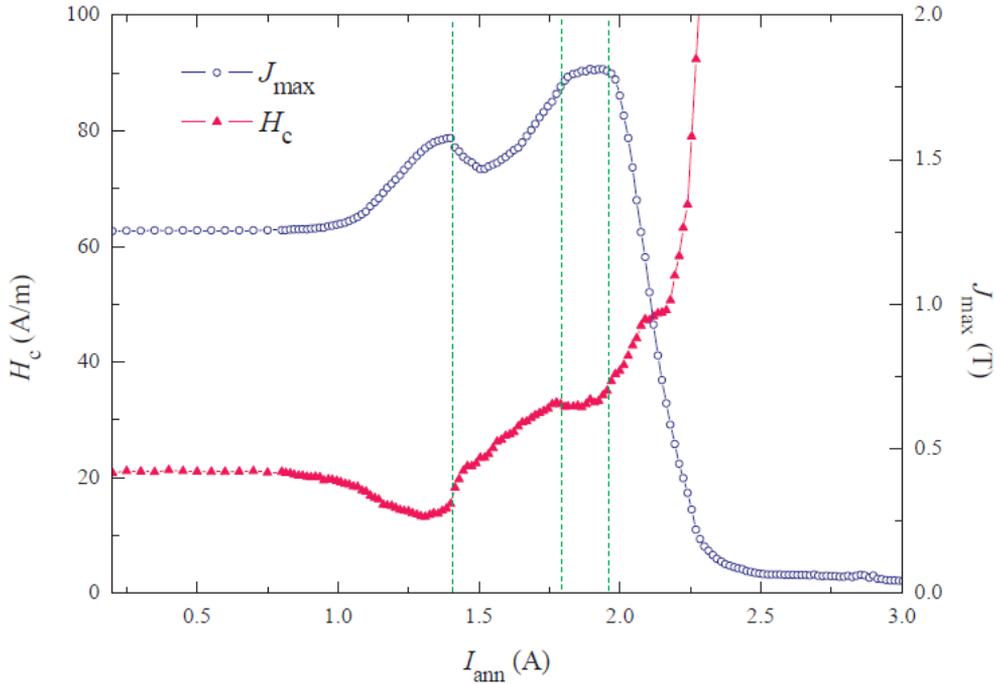
La adición de Ni o Mo a aleaciones del tipo Nanomet por medio de la técnica de *sputtering* no mejora las propiedades magnéticas blandas, pero sí su resistencia a la corrosión. Los resultados son coherentes con estudios anteriores que muestran una mejora de la resistencia a la corrosión por la sustitución de Ni. La coercitividad magnética de las películas delgadas de las aleaciones tratadas se deteriora en comparación con la de una muestra sin tratar. Esto hace suponer que la aleación Nanomet sin aliar presenta mejores propiedades magnéticas que la aleación con adición de estos elementos (Yamazaki et al., 2021).

### ***Tratamientos térmicos de aleaciones Nanomet***

Otro aspecto importante es el tratamiento térmico que se emplee para lograr la estructura nanocristalina; es importante en este aspecto el desarrollo de tratamientos térmicos para lograr la estructura de nanocristales en una matriz amorfa.

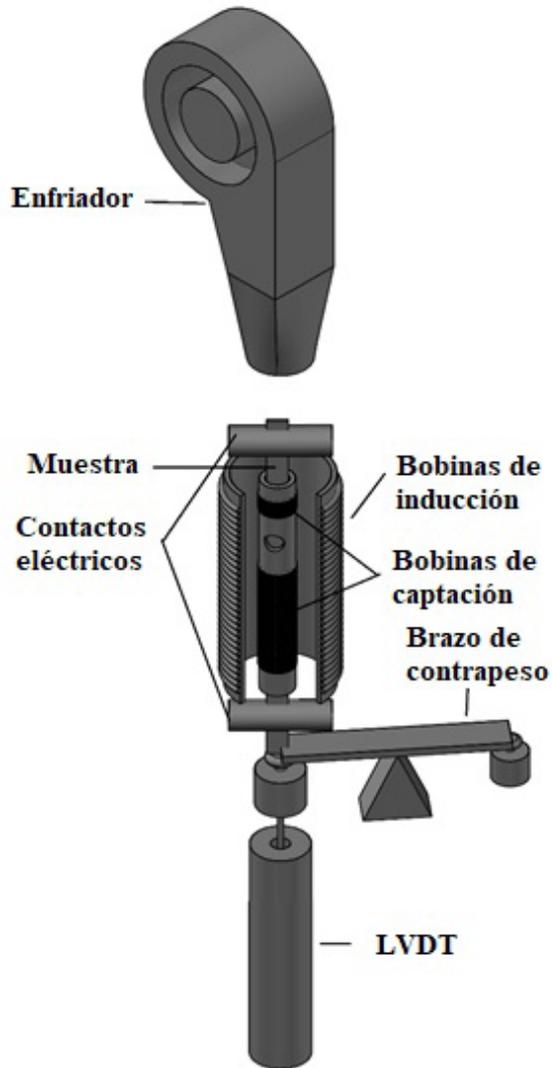
Partiendo de una aleación amorfa el tratamiento térmico es la estructura para lograr aleaciones nanocristalinas. Tomando una aleación del tipo Nanomet, los principales avances en los tratamientos térmicos son la cristalización de la aleación amorfa  $\text{Fe}_{83,3}\text{Si}_4\text{B}_8\text{P}_4\text{Cu}_{0,7}$  y la formación de nanocristales  $\alpha$ -Fe con un tamaño de  $17 \pm 5$  nm en la matriz amorfa después de un recocido a 450 °C durante 10 min (Dastanpour et al., 2020a).

Moya (2019) plantea tratamientos térmicos por medio de la técnica de Joule Heating, empleando pulsos eléctricos a muestras de material amorfo. Este método reconoce dos tipos de experimentos, de tipo (i) y (ii). Los tratamientos del tipo (i) proveen de una técnica para estudiar la evolución estructural del material medido a temperatura ambiente y su comportamiento a alta temperatura. Mientras que (ii) permite el estudio de la dinámica de evolución estructural con diferentes velocidades de calentamiento y, además, permite diseñar el tratamiento térmico más adecuado.

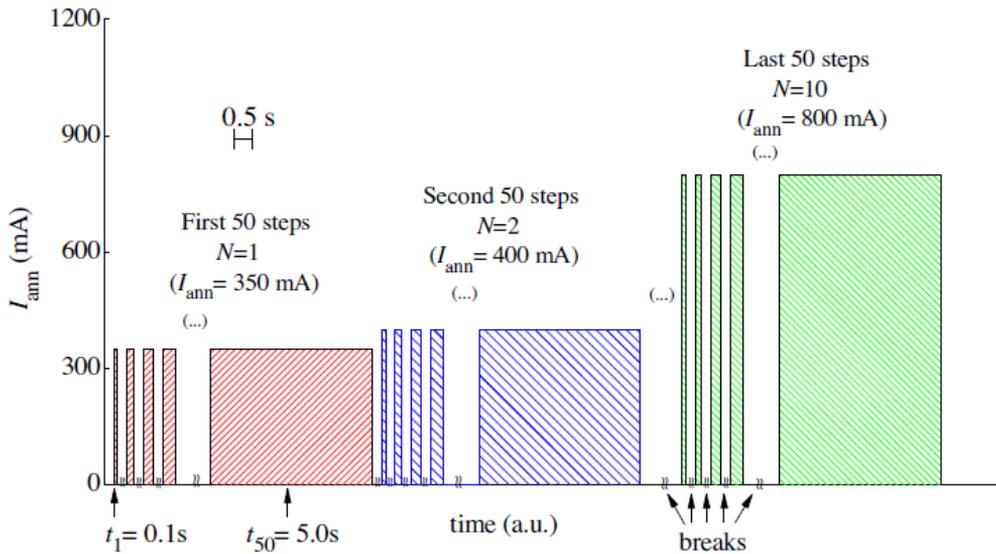


**Figura 3.** Evolución de la imanación de saturación y el campo coercitivo  $H_c$  con pulsos de recocido de corriente de pasos de amplitud creciente de  $\Delta I_{\text{ann}} = 0.015$  A (Moya, 2019).

En la Figura 3 se puede apreciar el comportamiento de campo coercitivo  $H_c$  y la imanación de saturación sobre de una muestra de Nanomet en forma de cinta utilizando pulsos de corriente continua.



**Figura 4.** Esquema general del equipo de Joule Heating Scanning Structure System (JHS3) (Moya, 2017).



**Figura 5.** Esquema ilustrativo de un calentamiento por pulsos (Moya, 2017).

En la Figura 4 se aprecia un esquema del equipo de Joule Heating Scanning Structure System planteado por Moya, donde las muestras de aleación amorfas introducidas en el interior de dos bobinas registran las propiedades magnéticas, mientras se inyecta corriente desde sus extremos. A su vez, la muestra es enfriada desde la parte superior mediante la inyección de aire a temperatura ambiente por un pequeño ventilador, en intervalos entre los ciclos. En la parte inferior, un pequeño sistema de balanza con pesos y contrapesos permite introducir una pequeña tensión y mantener estirada la muestra. Para registrar el desplazamiento de la muestra se utiliza un sensor LVDT, colocado de forma solidaria con esta. En la Figura 5 se presenta un esquema ilustrativo de las corrientes de calentamiento inyectadas en la muestra, en función del tiempo de ensayo.

### **Avances en sistemas de aleaciones ricas en Fe**

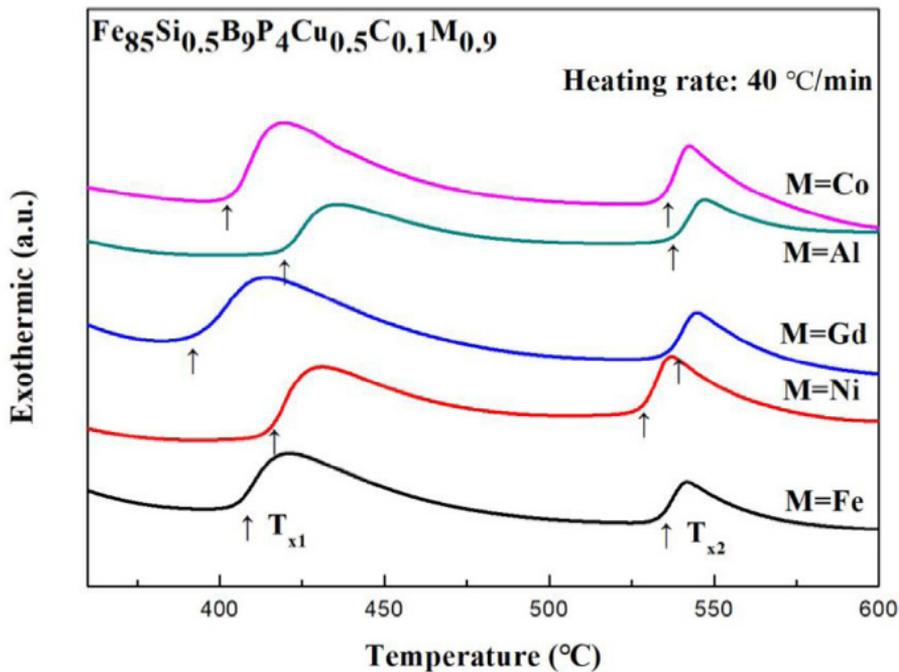
Además de las aleaciones del tipo Fe-Zr-B y Nanomet se plantea otro tipo de aleaciones, como lo son  $Fe_{86+x}(B_{12.5}M_{0.5}Cu_{0.4}Hf_{0.6})_{14-x}$ ,  $Fe_{85}Si_{0.5}B_9P_4-Cu_{0.5}C_{0.1}M_{0.9}$ ,  $Fe_{83-85}(B, C, Si)_{14-16}P_1$ ,  $Fe_{73}Mo_4B_5Si_5P_8C_5$  y  $Fe_{80}AlB_5P_9C_4$ .

Las aleaciones de la familia Fe-B-Cu-Hf dopadas con Si y con una coadición menor de P y aleaciones de Si con alta relación Si/P de 3/1 pueden mantener una alta GFA relativamente fuerte y todas las cintas amorfas son fáciles de fabricar. Después de su recocido con campo magnético, las

cintas cristalizadas de  $\text{Fe}_{86.4}(\text{B}_{12}\text{P}_{0.25}\text{Si}_{0.75}\text{Cu}_{0.4}\text{Hf}_{0.6})_{13.6}$  y  $\text{Fe}_{86.4}(\text{B}_{12.5}\text{Si}_{0.5}\text{Cu}_{0.4}\text{Hf}_{0.6})_{13.6}$  exhiben altos  $B_c$  de 1.98 T y 1.95 T y baja  $H_c$  de 2,1 A.m<sup>-1</sup> y 3,1 A.m<sup>-1</sup> (Xiao et al., 2021).

El estudio de las aleaciones  $\text{Fe}_{85}\text{Si}_{0.5}\text{B}_9\text{P}_4\text{Cu}_{0.5}\text{C}_{0.1}\text{M}_{0.9}$  donde M representa Fe, Ni, Gd, Al, Co, V y se estudió Hf, Ti y Cr. Se encuentra que la adición de Al, Co y Ni induce mayores energías de nucleación  $E_x$  y energía de crecimiento de grano  $E_p$  en las aleaciones  $\text{Fe}_{85}\text{Si}_{0.5}\text{B}_9\text{P}_4\text{Cu}_{0.5}\text{C}_{0.1}\text{M}_{0.9}$ ; esto mejora eficazmente la GFA suprimiendo el excesivo crecimiento de los granos  $\alpha$ -Fe. La adición de Gd promueve un incremento del intervalo de Temperatura  $\Delta T$  ( $\Delta T = T_{x2} - T_{x1}$ ), mejora la estabilidad térmica de la matriz amorfa y suprime la precipitación de fases secundarias (Xu et al., 2021).

En general, la temperatura de inicio de la cristalización ( $T_{x1}$ ), la temperatura de pico ( $T_{p1}$ , véase Figura 6) y la diferencia de temperatura ( $\Delta T$ ) de las aleaciones amorfas a una determinada velocidad de calentamiento pueden utilizarse para caracterizar la capacidad de formación de amorfos y la estabilidad térmica, mientras que la energía de activación de la cristalización puede reflejar fundamentalmente la barrera energética que el estado amorfo necesita superar durante el proceso de cristalización (Xu et al., 2021).



**Figura 6.** Curvas de análisis DSC de  $\text{Fe}_{85}\text{Si}_{0.5}\text{B}_9\text{P}_4\text{Cu}_{0.5}\text{C}_{0.1}\text{M}_{0.9}$  (M = Fe, Ni, Gd, Al, y Co) de cinta de aleación amorfa a velocidad de calentamiento de 40 °C/min en atmósfera de nitrógeno (Xu et al., 2021).

El resultado indica que la adición menor de elementos como Al, Ni y Co proporciona una barrera energética más alta, que dificulta la nucleación y el crecimiento de los granos de  $\alpha$ -Fe, mejorando así la capacidad de formación amorfa y la estabilidad térmica de las aleaciones (Xu et al., 2021).

El planteo de la aleación  $\text{Fe}_{83-85}(\text{B}, \text{C}, \text{Si})_{14-16}\text{P}_1$  mostró alta imanación de saturación con valores de 1,61–1,71 T, y un campo coercitivo  $H_c$  bajo, de 2,2–8,7 A.m<sup>-1</sup>. En la región de composición rica en Fe, se demostró que los metaloides exhiben efectos mucho más significativos sobre la magnetización de saturación que el Fe (Shi et al., 2021).

Los efectos de los metaloides B, C y Si en la imanación de saturación dependen en gran medida del contenido de Fe. Para las aleaciones amorfas con menor contenido de Fe, el momento magnético insuficiente es la razón principal detrás de la inadecuada imanación de saturación, mientras que, para las aleaciones amorfas con alto contenido de Fe, la interacción de intercambio magnético débil y la baja temperatura de Curie se convierten en los factores predominantes que influyen en la imanación de saturación (Shi et al., 2021).

A su vez, se demostró que la adición de C es eficaz para aumentar el momento magnético de las aleaciones amorfas a base de Fe, lo que también eleva los límites inferiores de  $B_s$  en las aleaciones amorfas ricas en Fe (Shi et al., 2021).

El estudio de las aleaciones  $\text{Fe}_{73}\text{Mo}_4\text{B}_5\text{Si}_5\text{P}_8\text{C}_5$  y  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  muestra que exhibieron una excelente estabilidad térmica. El comportamiento de cristalización de la aleación  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  recocida a 525 °C ocurrió en dos etapas. Para la aleación  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  recocida a 450 °C se obtuvieron propiedades magnéticas blandas superiores con imanación de saturación superiores a 1,5 T y campo coercitivo  $H_c$  bajo de 5,3 A.m<sup>-1</sup>. Sin embargo, la dureza de la aleación disminuyó con la aparición de partículas cristalinas, en particular, en la aleación  $\text{Fe}_{73}\text{Mo}_4\text{B}_5\text{Si}_5\text{P}_8\text{C}_5$  (Liu et al., 2021).

### ***Planteo de una nueva aleación magnéticamente blanda***

Se pueden considerar dos etapas importantes en el proceso de diseño de una aleación magnéticamente blanda de estructura nanocristalina. La primera de ellas es la obtención de la aleación amorfa, donde el factor principal es la GFA; la segunda etapa es el tratamiento térmico. Por ello, la aleación de la familia Nanomet puede ser una buena opción para planteos de tratamientos térmicos mediante la técnica de Joule Heating. Es posible modificar los métodos de recocido de estas aleaciones mediante la configuración de diferentes tipos de pulsos.

## **4. Aspectos de especial consideración**

La sustitución de parte del porcentaje de Fe por Co, C y Mo tiene como finalidad mejorar la GFA mediante la mejora en los valores de los parámetros PHSS y PHS en las aleaciones del tipo Nanomet. Estudios realizados en la aleación Nanomet confirman que la sustitución simultánea de 4 % de Co, 1 % C y 1 % de Mo en lugar de Fe mejoró el parámetro PHSS de -2,04 kJ. mol<sup>-1</sup> a -4,83 kJ. mol<sup>-1</sup> (Dastanpour et al., 2020b).

Agregar P a aleaciones del tipo Nanomet afecta la GFA. Para porcentajes menores a 1 % de P esta propiedad aumenta, la pérdida de núcleo disminuye gradualmente y la permeabilidad aumenta. La adición de porcentajes de P entre 1 y 2,5 % produce una disminución rápida de la GFA, esto se refleja en el crecimiento de los granos, el aumento rápido de campo coercitivo y en la pérdida de núcleo (Zhang et al., 2020). Se obtienen valores en  $(\text{Fe}_{80}\text{Si}_8\text{B}_6\text{Nb}_5\text{Cu})_{99}\text{P}$  de permeabilidad de 75,93 de un 5 % más alto, pérdidas de núcleo de  $370 \text{ W.Kg}^{-1}$  de un 14 % menor que la aleación Nanomet sin P.

Generalmente la sustitución de Ni o Mo por Fe no mejora las propiedades magnéticas, pero sí su resistencia a la corrosión para la aleación Nanomet. Por lo general, la aleación Nanomet sin aler presenta mejores propiedades magnéticas que la aleación con adición de estos elementos.

Partiendo de una aleación amorfa, el tratamiento térmico es la estructura para lograr aleaciones nanocristalinas. Tomando una aleación del tipo Nanomet, los principales avances en los tratamientos térmicos son la cristalización de la aleación amorfa  $\text{Fe}_{83,3}\text{Si}_4\text{B}_8\text{P}_4\text{Cu}_{0,7}$  y la formación de nanocristales  $\alpha\text{-Fe}$  con un tamaño de  $17 \pm 5 \text{ nm}$  en la matriz amorfa después de templar a  $450 \text{ }^\circ\text{C}$  durante 10 min (Dastanpour et al, 2020a).

Las aleaciones de la familia Fe-B-Cu-Hf dopadas con Si y con una coadición menor de P y aleaciones de Si con alta relación Si/P de 3/1 pueden mantener una alta GFA relativamente fuerte y todas las cintas amorfas son fáciles de fabricar. Después de su recocido con campo magnético, las cintas cristalizadas de  $\text{Fe}_{86,4}(\text{B}_{12}\text{P}_{0,25}\text{Si}_{0,75}\text{Cu}_{0,4}\text{Hf}_{0,6})_{13,6}$  y  $\text{Fe}_{86,4}(\text{B}_{12,5}\text{Si}_{0,5}\text{Cu}_{0,4}\text{Hf}_{0,6})_{13,6}$  exhiben altos  $B_s$  de 1.98 T y 1.95 T y baja  $H_c$  de  $2,1 \text{ A.m}^{-1}$  y  $3,1 \text{ A.m}^{-1}$  (Xiao et al., 2021).

El estudio de las aleaciones  $\text{Fe}_{85}\text{Si}_{0,5}\text{B}_9\text{P}_4\text{Cu}_{0,5}\text{C}_{0,1}\text{M}_{0,9}$  donde M representa Fe, Ni, Gd, Al, Co, V y se estudió Hf, Ti y Cr. Se encuentra que la adición de Al, Co y Ni induce mayores energías de nucleación  $E_x$  y energía de crecimiento de grano  $E_p$  en las aleaciones  $\text{Fe}_{85}\text{Si}_{0,5}\text{B}_9\text{P}_4\text{Cu}_{0,5}\text{C}_{0,1}\text{M}_{0,9}$ ; esto mejora eficazmente la GFA suprimiendo el excesivo crecimiento de los granos  $\alpha\text{-Fe}$ . La adición de Gd promueve un incremento del intervalo de Temperatura  $\Delta T$  ( $\Delta T = T_{x2} - T_{x1}$ ), mejora la estabilidad térmica de la matriz amorfa y suprime la precipitación de fases secundarias.

El planteo de la aleación  $\text{Fe}_{83-85}(\text{B}, \text{C}, \text{Si})_{14-16}\text{P}_1$  mostró alta imanación de saturación con valores de 1,61–1,71 T y un campo coercitivo  $H_c$  bajo de 2,2–8,7  $\text{A.m}^{-1}$ . En la región de composición rica en Fe, se demostró que los metaloides exhiben efectos mucho más significativos sobre la magnetización de saturación que el Fe.

El estudio de las aleaciones  $\text{Fe}_{73}\text{Mo}_4\text{B}_5\text{Si}_3\text{P}_8\text{C}_5$  y  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  muestra que exhibieron una excelente estabilidad térmica. El comportamiento de cristalización de la aleación  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  recocida a  $525 \text{ }^\circ\text{C}$  ocurrió en dos etapas. Para la aleación  $\text{Fe}_{80}\text{Al}_2\text{B}_5\text{P}_9\text{C}_4$  recocida a  $450 \text{ }^\circ\text{C}$  se obtuvieron propiedades magnéticas blandas superiores con imanación de saturación superiores a 1,5 T y campo coercitivo  $H_c$  bajo de  $5,3 \text{ A.m}^{-1}$ . Sin embargo, la dureza de la aleación disminuyó con la aparición de partículas cristalinas, en particular, en la aleación  $\text{Fe}_{73}\text{Mo}_4\text{B}_5\text{Si}_3\text{P}_8\text{C}_5$  (Liu et al., 2021).

## 5. Consideraciones finales

El objetivo de este estudio fue dar una introducción sobre los nuevos avances en los materiales magnéticos blandos en los últimos tres años. El aporte fundamental de este trabajo radica en dar una visión de los avances en las aleaciones magnéticas blandas, del grupo ricas en Fe, focalizando en aleaciones con porcentajes de Fe mayores al 80 %.

Estos resultados ponen de manifiesto que la habilidad de formación vítrea es una propiedad clave en la obtención de la aleación amorfa, representando un cuello de botella en este proceso. La adición de elementos como el Co, C, Mo y P a aleaciones del tipo Nanomet permite modificar la habilidad de formación de vidrio (GFA), el comportamiento de cristalización y las propiedades magnéticas. El P es un elemento económico que mejora las propiedades magnéticas blandas, empleándose en el rango de porcentaje adecuado. Además, la adición de Cu en aleaciones de la familia Fe-Zr-B permitió aumentar el intervalo de tratamiento térmico, llegando a valores de 154,7 °C. Esto permitió la simplificación del proceso de cristalización, refinando los granos y aumentando la densidad numérica de los nanocristales  $\alpha$ -Fe.

Métodos de tratamiento térmico como el Joule Heating abren nuevas posibilidades para la obtención de aleaciones magnéticas blandas nanocristalinas, siendo este calentamiento por efecto Joule una buena opción para la familia de materiales Nanomet. Se plantean así nuevas configuraciones de recocido.

## Referencias

- Arai, K. I., Tsutsumitake, H., y Ohmori, K. (1984, septiembre). Grain growth of rapid quenching high siliconiron alloys. *IEEE Transactions on magnetics*, Vol. MAG-20, 5.
- Azuma, D., Ito, N., y Ohta, M. (2020). Recent progress in Fe-based amorphous and nanocrystalline soft magnetic materials. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 501 (2020) 166373.
- Dastanpour, E., Enayati, M. H., y Ström, V. (2020a). Non-isothermal nanocrystallization of Fe<sub>83.3</sub>Si<sub>4</sub>B<sub>8</sub>P<sub>4</sub>Cu<sub>0.7</sub> (NANOMET®) alloy: modeling and the heating rate effect on magnetic properties. *Ĵ. Phys. D: Appl. Phys.*, 53. 215002 (7pp).
- Dastanpour, E., Enayati, M., Masood, A., y Ström, V. (2020b). On the glass forming ability (GFA), crystallization behavior and soft magnetic properties of nanometsubstituted alloys. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 529. 119774.
- Guo, H. Q., Reiningher, T., Kronmüller, H., Rapp, M., y Skumrev, V. K. (1991). Magnetism and Microstructure in Nanocrystalline FeCoZr Ferromagnets. *Phys. Stat. Sol.*, (a) 127, 519-526; 64.80; S1.1; S1.2.
- Herzer, G. (1997). Nanocrystalline Soft Magnetic Alloys. Hanau Germany: Vacuumschmelze GmbH D-63450.
- (1990, septiembre). Grain size dependence of coercivity and permeability in nanocrystalline ferromagnets. *IEEE Transactions on magnetics*, 26 (5).
- Herzer, G., y Warlimont, H. (1992). Nanocrystalline soft magnetic materials by partial crystallization of amorphous alloys. *Nanostructured materials*, 1, 263-268.

- Liu, C., Zhang, Y., Zhang, C., Kang, J., Yuan, G., y Misra, R. (2021). Thermal, magnetic and mechanical behavior of large-sized Fe-based amorphous alloy ribbons by twin-roll strip casting. *Intermetallics*, 132 107144.
- Makino, A., Hatanai, T., Naitoh, Y., Bitoh, T., Inoue, A., y Masumoto, T. (1997). Applications of Nanocrystalline Soft Magnetic Fe-M-B (M = Zr, Nb) Alloys “Nanoperm”. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(5).
- McCurrie, R. A. (1994). *Ferromagnetic Materials, Structure and Properties*. Academic Press.
- Moya, J. A. (2019). Magnetic properties in rapid current annealed Fe<sub>85.2</sub>Si<sub>0.5</sub>B<sub>9.5</sub>P<sub>4</sub>Cu<sub>0.8</sub> (NANOMET) ribbon. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 491 (2019) 165614.
- (2017). Structural and magnetic properties evolution study method using a single ribbon-shaped sample. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 432 300303.
- Muraca D., Silveyra J., Pagnola M., Cremaschi V. (2009). Nanocrystals magnetic contribution to FINEMET type softmagnetic materials with Ge addition. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 321 36403645
- Pfeifer, F., y Radeloff, C. (1980). Soft magnetic Ni-Fe and CoFe alloys. Some physical and metallurgical aspects. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 19 190207 Session 5: NiFe and CoFe alloys.
- Rao, B. R., Srinivas, M., Shah, A. K., Gandhi, A.S. y Murty, B. S. (2013). A new thermodynamic parameter to predict glass forming ability in iron based multi-component systems containing zirconium. *Intermetallics*, 35. 7381
- Sawa, T., y Takahashi, Y. (1990). Magnetic properties of FeCu (3d transition metals) SiB alloys with fine grain structure. *Journal of Applied Physics*, 67, 5565.
- Shi, L., Hu, X., Li, Y., Yuan, G., y Yao, K. (2021). The complementary effects of Fe and metalloids on the saturation magnetization of Febased amorphous alloys. *Intermetallics*, 131 107116.
- Suzuki, K., Makino, A., Kataoka, N., Inoue, A., y Masumoto, T. (1991). High saturation magnetization and soft magnetic properties of bcc Fe-Zr-B and Fe-Zr-B-M (M = Transition Metal) Alloys with Nanoscale grain size. *Material Transactions*, JIM, 32(1) 93-102.
- Xiao, M., Zheng, L., Zhou, L., Yu, H., Wang, G., y Zeng, D. (2021). Composition dependence of amorphous forming, crystallization behaviors and magnetic properties in Fe-rich FeBCu-Hf alloys. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 556 120560.
- Xu, J., Liu, X., Wang, G., Luo, T., Wang, J., Lu, K., Yang, Y. (2021). Crystallization behavior, soft magnetic properties and good bending ductility of high Fe content FeSiBCuPC alloys induced by composition design. *Journal of Alloys and Compounds*, 859 157850
- Yu, W., Lin, H., Lu, L., Wang, L., y Xing, G. (2020). Effect of chemical composition and Cu addition on crystallization and magnetic characteristics of FeZrB alloys. *Physics Letters*, A384 126640.
- Zhang L., Chen H., Ouyang Y., Du Y. (2014, abril). Amorphous forming ranges of Al-Fe-Nd-Zr system predicted by Miedema and geometrical models. *Journal of Rare*, 32(4), 343.
- Zhang, Z., Jiang, Z., Meng, L., Yu, H., Ma, H., y Guan, L. (2020). The Magnetic Properties and Glass Formation Ability of the Fe<sub>80</sub>Si<sub>8</sub>B<sub>6</sub>Nb<sub>5</sub>Cu Amorphous-Nanocrystalline Alloys with Different Phosphorus Addition. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*.

## **Diego Lisandro Rincón**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniero industrial graduado en la Universidad Católica de Salta en 2011. Master en Ingeniería Industrial por la Universidad Europea del Atlántico en 2018. Actualmente es becario doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Su tema de investigación es la producción y caracterización de aleaciones nanoestructuradas magnéticas blandas para su empleo en la eficiencia energética. Se desempeña como docente e investigador en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Salta.

Correo electrónico: drincon@ucasal.edu.ar



## **Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta**

### **Global error behavior analysis in the explicit Runge-Kutta methods**

**Carlos Marcelo Albarracín<sup>1</sup>, María Virginia Quintana<sup>1,2</sup>**

---

*Métodos numéricos/ artículo científico*

Citar: Albarracín C. M. y Quintana M. V. (2022). Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta. *Cuadernos de Ingeniería* (14). <http://revistas.ucasal.edu.ar>

*Recibido: octubre/2022*

*Aceptado: diciembre/2022*

#### **Resumen**

La resolución numérica de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias involucra típicamente ingresar las especificaciones del problema y una cota del error local de discretización para generar luego una solución aproximada del problema. No obstante, la obtención precisa y confiable de las soluciones numéricas requiere el conocimiento de la separación admisible entre los nodos de la malla ( $h$ ). También es necesario llevar un control del error global. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge-Kutta, determinar su orden y obtener la condición necesaria para garantizar la convergencia.

**Palabras claves:** Runge-Kutta, error global, control del error, convergencia.

#### **Abstract**

The numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations typically involves entering the problem specifications and a bound on the local discretization error to then generate an approximate solution of the problem. However, obtaining precise and reliable numerical solutions requires knowledge of the allowable spacing between mesh nodes ( $h$ ). Also, it is necessary to carry out global error control. Therefore, the aim of this work is to analyze the behavior of the global error in the explicit Runge-Kutta methods, to determine the order of the global error and obtain the necessary condition to guarantee convergence.

**Keywords:** Runge-Kutta, global error, error control, convergence.

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.

<sup>2</sup> Universidad Católica de Salta, Salta, Argentina

## 1. Introducción

Los métodos Runge-Kutta (R-K) explícitos son ampliamente utilizados en la resolución numérica de problemas de valor inicial de la forma

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

La solución de este problema se puede aproximar por medio de las siguientes fórmulas de orden  $p$  con  $1 \leq p \in \mathbb{N}$  (Hull et al., 1972),

$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{i=1}^s a_i R_i, \quad Y_0 = y_0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

donde  $Y_{n+1}$  es la aproximación al valor exacto  $y(x_{n+1})$ ,  $h$  es la longitud del paso o separación de los nodos de la malla ( $h = x_{n+1} - x_n$ ),  $N$  el índice del último punto de la malla en donde se calcula la solución aproximada,  $s \geq p$  y  $R_i$  se define como

$$R_i = f \left( x_n + h b_i, Y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} R_j \right).$$

Los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_{ij}$  son constantes que dependen del método R-K elegido.

Un aspecto importante en cualquier método numérico reside en determinar expresiones que acoten el error que se comete por su aplicación. En los métodos R-K se identifican tres tipos de errores: el error local de discretización  $e(x;h)$ , el error local de truncamiento  $e_t(x;h)$  y el error global  $E(x_n;h)$ . El primero se obtiene a partir de reemplazar la solución aproximada por la exacta en la ecuación en diferencias escrita en forma normal, esto es

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)).$$

La diferencia entre los dos términos, que es distinta de cero, constituye el error local de discretización

$$e(x;h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)). \quad (2)$$

Como es conocido, el error local de discretización de los métodos de orden  $p$  pertenece al conjunto de funciones  $O(h^p)$  y es un error que se comete en  $x$ . Por ejemplo, en el caso del método de Euler es de orden  $O(h)$ , y  $O(h^4)$  para los R-K de cuarto orden. Este error es inherente al método y su expresión es la misma en cualquier punto de la malla.

El error local de truncamiento (Isaacson y Keller, 1994) es el que surge al proponer la solución exacta por medio de la fórmula del método, pero considerando exactos todos los valores previos. Si se parte de (2) resulta

$$y(x+h) = y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) + h \cdot e(x;h). \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3), el último término es el error local de truncamiento, es decir

$$e_i(x;h) = h \cdot e(x;h),$$

el cual, de acuerdo con Higham (1991) es de orden  $O(h^{p+1})$ . También es posible obtener la expresión de este error a partir del desarrollo en serie de Taylor de  $y(x+h)$ . En la literatura es habitual que se refiera a este error como equivalente al error local de discretización. La diferencia conceptual reside en que, a diferencia del error local de discretización, el de truncamiento es un error de orden mayor y se comete en  $(x+h)$

## 2. Análisis del error global

El error global es el que surge por la acumulación de errores locales, por errores en la evaluación de la función  $f(x,y)$  y por errores de redondeo que dependen del dispositivo de cálculo o de la cantidad de dígitos significativos utilizados.

El error global se define como

$$E(x_n;h) = y(x_n) - Y(x_n).$$

En la bibliografía del tema, como por ejemplo en Enright (1989), se determina para el caso del método de Euler que el error global es de orden  $O(h)$ , lo cual constituye una cota superior del error y se aclara que dicha cota resulta en una sobreestimación del error. Esto es así ya que la cota obtenida no es el supremo.

La ecuación en diferencias correspondiente a la ecuación (1) se expresa como función de la siguiente manera:

$$Y(x+h) = Y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)).$$

Restando de la ecuación (3) la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} y(x+h) - Y(x+h) &= y(x) + h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) + h \cdot e(x;h) - Y(x) - h \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \\ &= y(x) - Y(x) + h \left[ \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \right] + h \cdot e(x;h), \end{aligned}$$

es decir,

$$E(x+h;h) = E(x;h) + h \left[ \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x)) \right] + h \cdot e(x;h).$$

De la ecuación (4) se observa que el valor del error global en  $x+h$  involucra el error global en el paso anterior  $x$ , la diferencia que surge de evaluar  $\sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, Y(x))$  y el aporte del error local de discretización en  $x$ .

A partir de (4) y para  $x = x_n$  se tiene

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_n; h) + h \left[ \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_n, y_n) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_n, Y_n) \right] + h \cdot e(x_n; h) \quad (5)$$

y para  $x = x_{n-1}$

$$E(x_n; h) = E(x_{n-1}; h) + h \left[ \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_{n-1}, y_{n-1}) - \sum_{i=1}^s a_i R_i(x_{n-1}, Y_{n-1}) \right] + h \cdot e(x_{n-1}; h). \quad (6)$$

Al adoptar

$$F_p(x, y(x)) = \sum_{i=1}^s a_i R_i(x, y(x)),$$

y reemplazando la ecuación (6) en la ecuación (5) resulta

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_{n-1}; h) + h \left\{ \left[ F_p(x_{n-1}, y_{n-1}) - F_p(x_{n-1}, Y_{n-1}) \right] + \left[ F_p(x_n, y_n) - F_p(x_n, Y_n) \right] \right\} + h \cdot \left[ e(x_{n-1}; h) - e(x_n; h) \right].$$

En forma análoga, aplicando el procedimiento anterior para  $x = x_{n-2}, x = x_{n-3}, \dots, x = x_0$  se obtiene la forma general

$$E(x_{n+1}; h) = E(x_0; h) + h \sum_{i=0}^n \left[ F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right] + h \sum_{i=0}^n e(x_i; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Si se considera la condición inicial del problema en  $x_0$ , se tiene  $Y_0 = y_0$  por lo tanto  $E(x_0; h) = 0$  y  $F_p(x_0, y_0) - F_p(x_0, Y_0) = 0$  entonces

$$E(x_{n+1}; h) = h \sum_{i=1}^n \left[ F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right] + h \sum_{i=0}^n e(x_i; h), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Con el propósito de determinar el orden del error global, se establecen las siguientes hipótesis para la función  $F_p(x, y)$

- $F_p$  es continua en la variable  $x$ .
- $F_p$  satisface la condición de Lipschitz para  $y$ , es decir que para todo  $i \geq 0$  existe  $L_i > 0$  tal que  $\left| F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right| \leq L_i |y_i - Y_i|$ .

Tomando valor absoluto en (7) se tiene

$$\left| E(x_{n+1}; h) \right| \leq h \sum_{i=1}^n \left| F_p(x_i, y_i) - F_p(x_i, Y_i) \right| + h \sum_{i=0}^n \left| e(x_i; h) \right|.$$

A partir de la expresión anterior y recurriendo a la condición de Lipschitz, se obtiene

$$\left| E(x_{n+1}; h) \right| \leq h \sum_{i=1}^n L_i |y_i - Y_i| + h \sum_{i=0}^n \left| e(x_i; h) \right|.$$

Al introducir la constante  $K = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i\}$  y teniendo presente que  $|y_i - Y_i| = |E(x_i; h)|$  la expresión anterior se reduce a

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)| + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|. \quad (8)$$

La ecuación (8) constituye una cota para el error global, donde el segundo término de la derecha de la desigualdad es de orden  $O(h^{p+1})$ .

Para estudiar el orden de  $E(x_{n+1}; h)$  se procede con el análisis del término  $h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)|$ . Si en la ecuación (8) se considera  $n = 0$ , se obtiene

$$|E(x_1; h)| \leq h \cdot |e(x_0; h)|.$$

Para  $n = 1$ :

$$|E(x_2; h)| \leq h^2 K \cdot |e(x_0; h)| + h \sum_{i=0}^1 |e(x_i; h)|.$$

Para  $n = 2$ :

$$|E(x_3; h)| \leq h^3 K^2 \cdot |e(x_0; h)| + h^2 K \cdot |e(x_0; h)| + h^2 K \sum_{i=0}^1 |e(x_i; h)| + h \sum_{i=0}^2 |e(x_i; h)|. \quad (9)$$

A partir de la ecuación (9) y por inducción se puede deducir que la expresión de  $|E(x_{n+1}; h)|$  es de la forma

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq a_{p+2} h^{p+2} + a_{p+3} h^{p+3} + \dots + a_{p+n+1} h^{p+n+1} + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|,$$

es decir,

$$|E(x_{n+1}; h)| \leq \sum_{i=1}^n a_{p+i+1} h^{p+i+1} + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)| = g_1(h) + h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|, \quad (10)$$

en donde  $g_1(h) = \sum_{i=1}^n a_{p+i+1} h^{p+i+1}$  y los  $a_i > 0$ ,  $i = p+2, p+3, \dots, p+n+1$ .

La expresión dada en la ecuación (10) es la cota del error global. Resulta relevante determinar el orden de este error, por lo tanto, se analizan los términos involucrados.

#### TEOREMA

Para todo  $h \in (0,1)$  la función  $g_1(h)$  pertenece al conjunto de funciones de orden  $O(h^{p+2})$ .

#### DEMOSTRACIÓN

La función  $g_1(h) \in O(h^{p+2})$  si y solo si existe una constante  $C > 0$  tal que para la función  $g_2(h) = h^{p+2}$ , se verifica  $g_1(h) \leq C \cdot g_2(h)$ ,  $\forall h \in (0,1)$ . Entonces  $C \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \{g_1(h)/g_2(h)\}$

De la definición de  $g_1(h)$  y  $g_2(h)$  se tiene  $g_1(0) = g_2(0) = 0$ . Dado que la constante  $C$  puede tomar su valor máximo en los extremos del intervalo  $[0,1]$ , resulta

$$C \geq \lim_{h \rightarrow 1} \frac{g_1(h)}{g_2(h)} = a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1}.$$

Planteando  $g_1(h) - C \cdot g_2(h) \leq 0$  con  $C = a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1}$  y para todo  $h$  perteneciente al intervalo  $(0,1)$  se obtiene:

$$a_{p+2}h^{p+2} + a_{p+3}h^{p+3} + \dots + a_{p+n+1}h^{p+n+1} - (a_{p+2} + a_{p+3} + \dots + a_{p+n+1})h^{p+2} \leq 0,$$

es decir,

$$a_{p+3}(h^{p+3} - h^{p+2}) + \dots + a_{p+n+1}(h^{p+n+1} - h^{p+2}) \leq 0.$$

Tomando factor común  $h^{p+2}$  se obtiene la siguiente desigualdad

$$h^{p+2} [a_{p+3}(h-1) + a_{p+4}(h^2-1) + \dots + a_{p+n+1}(h^{n-1}-1)] \leq 0. \quad (11)$$

Considerando que  $h \in (0,1)$  y que los factores  $(h-1), (h^2-1), \dots, (h^{n-1}-1)$  toman valores negativos, se verifica que  $g_1(h) - C \cdot g_2(h) \leq 0$ , por lo tanto, resulta  $g_1(h) \in O(h^{p+2})$ .

De la demostración se concluye que  $g_1(h) \leq C \cdot g_2(h)$ . Esto también se cumple si se adopta  $g_2(h) = h^{p+d}$  en dónde  $1-p \leq d \leq 2$ . Entonces, las funciones  $C \cdot h^{p+d}$  acotan superiormente a  $g_1$  siendo la menor de ellas  $C \cdot h^{p+2}$ .

Por otra parte, si se propone  $g_2(h) = h^{p+d}$ ,  $d \geq 3$ , el primer factor de la ecuación (11) queda de la forma  $a_{p+2}(h^{-d+2} - 1)$ . Por lo tanto, para un  $h \in (0,1)$  lo suficientemente pequeño, se tendrá  $g_1(h) > C \cdot g_2(h)$  al menos en algunos nodos de la malla.

### COROLARIO

Para los métodos R-K dados por (1), asumiendo  $h \in (0,1)$  el error global dado por (8) está compuesto por los términos:  $h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)| \in O(h^{p+1})$  y  $h \cdot K \sum_{i=1}^n |E(x_i; h)| \in O(h^{p+2})$ , por lo tanto resulta

$$|E(x_{n+1}; h)| \in O(h^{p+1}).$$

De esta forma se concluye que toda función de la forma  $C_n h^d$ ,  $1 \leq d \leq p+1$  es una cota superior del error global  $E(x_{n+1}; h)$  y para  $d = p+1$  se tiene el supremo del error global.

### EJEMPLO 1

Sea el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = 2x - (y - x^2), \quad y(0) = 0,$$

cuya solución exacta es  $y(x) = x^2$ . Al ser  $x_n = x_0 + n \cdot h$ , la solución exacta en los puntos particulares  $x_2$  y  $x_6$  en función de  $h$  es  $y_2 = 4 \cdot h^2$  y  $y_6 = 36 \cdot h^2$ , respectivamente.

La aplicación del método de Euler (R-K de primer orden) en los mismos puntos resulta:

$$Y_2 = 2 \cdot h^2 + h^3,$$

$$Y_6 = 30 \cdot h^2 + 15 \cdot h^3 - 20 \cdot h^4 + 15 \cdot h^5 - 6 \cdot h^6 + h^7.$$

Por lo tanto, el error global en ambos casos es

$$E(x_2; h) = |2 \cdot h^2 - h^3| \quad \text{y}$$

$$E(x_6; h) = |6 \cdot h^2 - 15 \cdot h^3 + 20 \cdot h^4 - 15 \cdot h^5 + 6 \cdot h^6 - h^7|.$$

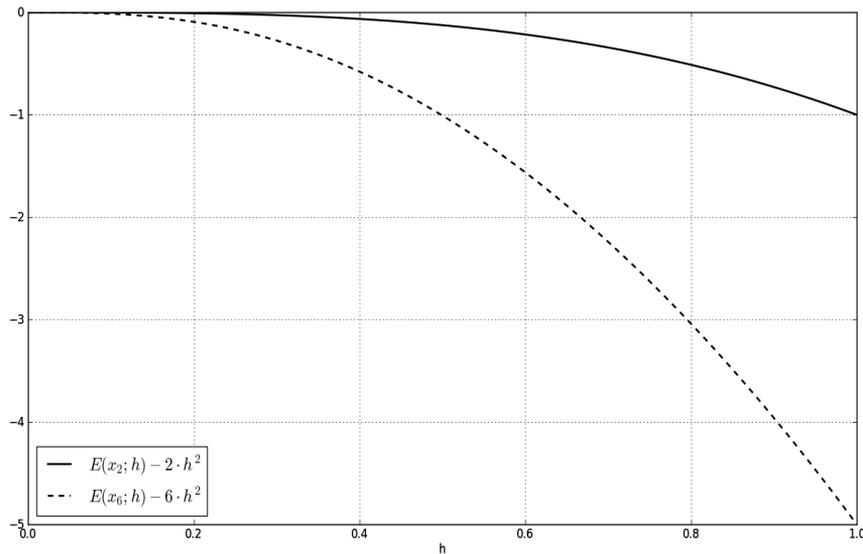
Del corolario se tiene que el error global pertenece al conjunto de funciones  $O(h^2)$ . Entonces:

$$C_2 \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \left\{ \frac{|E(x_2; h)|}{h^2} \right\} \quad \text{y} \quad C_6 \geq \max_{0 \leq h \leq 1} \left\{ \frac{|E(x_6; h)|}{h^2} \right\}.$$

Para el problema en estudio, los valores máximos de las constantes  $C_2$  y  $C_6$  se obtienen para  $h = 0$  por lo tanto resulta

$$C_2 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{|E(x_2; h)|}{h^2} \right\} = 2 \quad \text{y} \quad C_6 \geq \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{|E(x_6; h)|}{h^2} \right\} = 6.$$

En la Figura 1 se grafican los valores de las funciones  $|E(x_2; h)| - 2 \cdot h^2$  y  $|E(x_6; h)| - 6 \cdot h^2$ . Se observa que siempre toman valores negativos en el intervalo  $(0, 1)$ , lo cual indica que los errores globales en  $x_2$  y  $x_6$  están acotados por funciones de orden  $O(h^2)$ .



**Figura 1.** Gráfico de las funciones  $|E(x_2; h)| - 2 \cdot h^2$  y  $|E(x_6; h)| - 6 \cdot h^2$ .

### 3. Condición necesaria de convergencia

Los métodos basados en ecuaciones de diferencias son convergentes con respecto a la ecuación diferencial que aproximan, si se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \max_{1 \leq n \leq N} \left[ \left| y(x_n) - Y(x_n) \right| \right] \right\} = 0. \quad (12)$$

Esto es, el error global debe tender a cero cuando  $h$  tiende a cero, es decir:  $\lim_{h \rightarrow 0} |E(x_n; h)| = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

De (10) se concluye que además de  $h \sum_{i=0}^n |e(x_i; h)|$ , el error global  $|E(x_{n+1}; h)|$  tendrá términos con factores  $h^{p+n+1} K^n$ ,  $h^{p+n} K^{n-1}$ , ...,  $h^{p+2} K$ . El factor elevado a la mayor potencia en (10)  $h^{p+n+1} K^n$  se puede expresar como  $h^{p+1} (h \cdot K)^n$ . Entonces, para que se verifique la condición (12) para toda  $h \in (0, 1)$  se debe satisfacer

$$(h \cdot K)^n \leq 1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

es decir:

$$h \cdot K \leq 1. \quad (13)$$

La ecuación (13) constituye una condición necesaria de convergencia para todo método R-K de orden  $p$  de la forma dada por la ecuación (1).

#### EJEMPLO 2

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$y'(x) = -\beta \cdot y, \quad y(0) = y_0,$$

en donde  $0 \leq \beta \in \mathbb{R}$ . Satisfacer la condición necesaria de convergencia implica que esta se debe cumplir en todos los puntos  $x_n$  de la malla. De la condición de Lipschitz para el caso de Euler se tiene

$$|-\beta \cdot y_n + \beta \cdot Y_n| \leq L_n |y_n - Y_n| \Leftrightarrow \beta |y_n + Y_n| \leq L_n |y_n - Y_n|.$$

Multiplicando por  $h$  y simplificando resulta

$$h \cdot \beta \leq h \cdot L_n \leq 1.$$

Es decir que, para el método de Euler, la condición necesaria de convergencia es

$$h \leq \frac{1}{\beta}.$$

Si se adopta un R-K de segundo orden se tendrá

$$\begin{aligned} \left| -(a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)) \cdot y + (a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)) \cdot Y_n \right| &\leq L_n |y_n - Y_n|, \\ \left| a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta) \right| \cdot |-y_n + Y_n| &\leq L_n |y_n - Y_n|, \end{aligned}$$

es decir

$$h \cdot |a_1 \cdot \beta + a_2 \cdot \beta(1 - h \cdot c_{21}\beta)| \leq 1. \quad (14)$$

Teniendo presente que los métodos de segundo orden deben satisfacer las ecuaciones  $b_2 = c_{21}$ ,  $a_1 + a_2 = 1$  y  $a_2 b_2 = 1/2$  (Atkinson, 1978; Burden y Faires, 1985) y que la desigualdad dada por (14) tiene como solución  $0 \leq h \leq (a_1 + a_2) / (c_{21} a_2 \beta)$  resulta que la condición necesaria de convergencia se satisface cuando

$$h \leq \frac{a_1 + a_2}{c_{21} a_2 \beta} = \frac{2}{\beta}.$$

#### 4. Control de la longitud de paso $h$

La condición de convergencia dada por (13) implica que en cada  $x_n$  se debe satisfacer la desigualdad  $h \cdot L_n \leq 1$ . Por lo tanto, es posible plantear

$$\left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right| \leq L_{n+1} |y_{n+1} - Y_{n+1}|$$

y al multiplicar por  $h$  se tiene

$$h \left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right| \leq h \cdot L_{n+1} |y_{n+1} - Y_{n+1}|.$$

Considerando la condición dada por (13) resulta

$$\frac{h \left| F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1}) \right|}{|y_{n+1} - Y_{n+1}|} \leq h \cdot L_{n+1} \leq 1, \quad (15)$$

en donde  $|y_{n+1} - Y_{n+1}|$  se puede expresar de la siguiente forma

$$|y_{n+1} - Y_{n+1}| = \left| y_n + h \cdot F_s(x_n, y_n) + h \cdot e(x_n; h) - Y_n - h \cdot F_s(x_n, Y_n) \right|.$$

Es usual que en los algoritmos de los métodos R-K con control de paso se asuma  $Y_n \approx y_n$  por lo que la expresión anterior resulta

$$|y_{n+1} - Y_{n+1}| \approx h \left| e(x_n; h) \right|.$$

Al reemplazar esta última expresión en (15) se tiene

$$\frac{|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})|}{|e(x_n; h)|} \leq 1. \quad (16)$$

Por otra parte, si se admite una cota para el error local, entonces de la ecuación (16) se tiene

$$|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| \leq |e(x_n; h)| \leq \varepsilon, \quad (17)$$

es decir, la longitud de paso  $h$  se debe adaptar para que las dos condiciones dadas por (17) se verifiquen simultáneamente en todo  $x_n$ .

## 5. Algoritmo para el control de $h$

A partir de los resultados obtenidos es posible implementar un algoritmo para modificar la longitud de paso  $h$  con el propósito de satisfacer la condición de convergencia (13) y mantener acotado el error local de discretización.

Supóngase que se recurre a dos métodos de R-K, de orden  $p$  y  $p + 1$ . Asumiendo que los valores obtenidos con el método de orden  $p + 1$  son lo suficientemente precisos como para considerarlos exactos, es decir

$$y_{n+1} = y_n + h F_{p+1}(x_n, y_n). \quad (18)$$

Al plantear el error local de discretización del método de orden  $p$  se tiene

$$|e(x_n; h)| = \left| \frac{y_{n+1} - y_n}{h} - F_p(x_n, y_n) \right|$$

y al reemplazar  $y_{n+1}$  por la expresión (18) resulta

$$|e(x_n; h)| = |F_{p+1}(x_n, y_n) - F_p(x_n, y_n)| \quad (19)$$

A partir de las ecuaciones (17) y (18), se puede ajustar la longitud del paso, disminuyéndola o incrementándola según se requiera de acuerdo con los criterios dados por la condición de convergencia y cota del error local de discretización. Una posibilidad es la siguiente:

A PARTIR DE  $h = 1$ :

SI  $|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| > |e(x_n; h)|$  O  $|e(x_n; h)| > \varepsilon$ , DISMINUIR  $h$

SI  $|F_p(x_{n+1}, y_{n+1}) - F_p(x_{n+1}, Y_{n+1})| < 0.96 |e(x_n; h)|$  Y  $|e(x_n; h)| < 0.96 \varepsilon$ , INCREMENTAR  $h$

## 6. Resultados numéricos

Para ilustrar la aplicación del control del paso  $h$  se propone el siguiente problema de valor inicial.

### EJEMPLO 3

Considérese el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} y'(x) &= -32(x-1)y \ln(2), \quad \forall x \in (0, 2), \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

en donde  $0 < a \in \mathbb{R}$ , y cuya solución exacta es  $y = a \cdot 2^{16(2x-x^2)}$ .

En forma análoga al procedimiento aplicado en el ejemplo 2, la condición necesaria de convergencia dada por (13) resulta dependiente de  $n$  esto es

$$h|nh-1| \leq \frac{1}{32 \ln(2)}.$$

La implementación del algoritmo propuesto en el punto anterior para el control de paso utiliza los métodos R-K de cuarto orden clásico (Atkinson, 1978) y tercer orden con coeficientes:

$$a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{1}{6}, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = 1, c_{21} = \frac{1}{2}, c_{31} = -1, c_{32} = 2.$$

Al adoptar  $\varepsilon = 10^{-3}$  como cota para el error local de discretización se obtienen variaciones en el paso  $h$ , las que se muestran en las Figuras 2 y 3, considerando dos casos, el primero para  $a = 2 \cdot 10^{-2}$  y el segundo para  $a = 2 \cdot 10^{-10}$ .

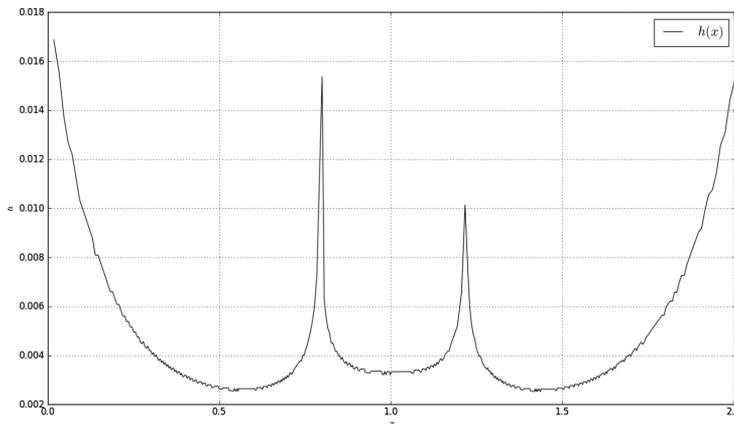
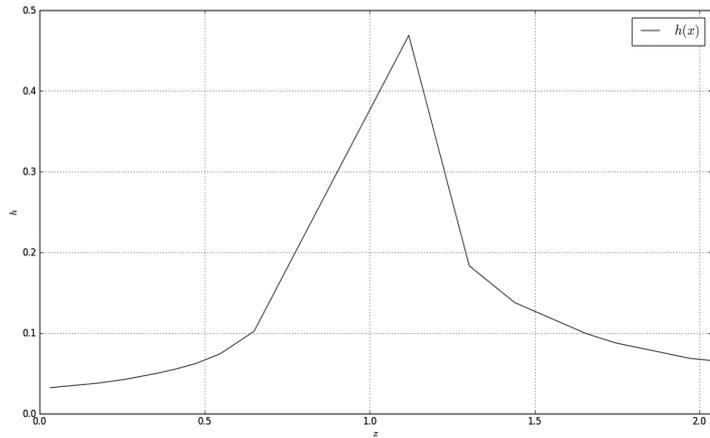


Figura 2. Variación del paso  $h$  en función de  $x$  para  $a = 2 \cdot 10^{-2}$ .



**Figura 3.** Variación del paso  $h$  en función de  $x$  para  $a = 2 \cdot 10^{-10}$ .

En las Tablas 1 y 2 se muestran, respectivamente, resultados numéricos de los dos casos. Los valores de  $y_n$  corresponden al R-K de cuarto orden clásico.

**Tabla 1.** Valores de la solución aproximada, condición necesaria de convergencia, error local de discretización y error global para  $a = 2 \cdot 10^{-2}$ .

n	x[n]	y[n]	hL[n]	e[n]	E[n]
0	0.0000	2.000000E-02	-----	9.349076E-04	0.000000E+00
1	0.0169	2.898355E-02	0.439327	9.926961E-04	-2.898355E-02
2	0.0324	4.057131E-02	0.391823	9.056310E-04	-4.057131E-02
3	0.0462	5.438925E-02	0.334681	8.989596E-04	-5.438925E-02
4	0.0589	7.099291E-02	0.300432	9.846190E-04	-7.099291E-02
5	0.0710	9.137621E-02	0.282736	9.431558E-04	-9.137621E-02
6	0.0822	1.149727E-01	0.254619	8.861561E-04	-1.149727E-01
7	0.0926	1.417302E-01	0.229736	9.241484E-04	-1.417302E-01
8	0.1025	1.728732E-01	0.217011	9.548585E-04	-1.728732E-01
9	0.1120	2.087612E-01	0.205119	9.780283E-04	-2.087612E-01
10	0.1212	2.497312E-01	0.193995	9.936004E-04	-2.497312E-01
-----	-----	-----	-----	-----	-----
507	1.9499	5.906090E-02	0.214737	9.889483E-04	-5.906090E-02
508	1.9625	4.522773E-02	0.237124	8.963965E-04	-4.522773E-02
509	1.9756	3.414758E-02	0.248116	9.637813E-04	-3.414758E-02
510	1.9900	2.492902E-02	0.273759	8.897618E-04	-2.492902E-02
511	2.0053	1.776957E-02	0.291463	6.741444E-04	-1.776957E-02

**Tabla 2.** Valores de la solución aproximada, condición necesaria de convergencia, error local de discretización y error global para  $a = 2 \cdot 10^{-10}$ .

n	x[n]	y[n]	hL[n]	e[n]	E[n]
0	0.0000	2.000000E-10	-----	6.431155E-11	0.000000E+00
1	0.0324	4.054054E-10	0.971433	1.280238E-10	3.344570E-13
2	0.0661	8.249104E-10	0.975112	2.531049E-10	1.378327E-12
3	0.1012	1.681773E-09	0.974869	4.953840E-10	4.251653E-12
4	0.1377	3.428087E-09	0.970212	9.563754E-10	1.160547E-11
5	0.1757	6.969869E-09	0.960632	1.920831E-09	2.948449E-11
6	0.2160	1.429102E-08	0.969145	3.805289E-09	7.319923E-11
7	0.2588	2.943637E-08	0.969234	7.809237E-09	1.778219E-10
8	0.3051	6.147625E-08	0.982571	1.564930E-08	4.329427E-10
9	0.3552	1.293111E-07	0.980719	3.186975E-08	1.046240E-09
10	0.4106	2.754744E-07	0.981870	6.479146E-08	2.541435E-09
11	0.4729	5.952107E-07	0.974275	1.410141E-07	6.229308E-09
12	0.5473	1.334888E-06	0.975690	3.652812E-07	1.603648E-08
13	0.6496	3.309266E-06	0.961854	4.839602E-07	4.865406E-08
14	1.1187	9.767843E-06	0.555182	1.328937E-06	1.443444E-06
15	1.3021	4.140263E-06	0.944053	1.527712E-06	6.220009E-07
16	1.4400	1.375777E-06	0.954466	1.252875E-06	1.555230E-07
17	1.5571	4.088481E-07	0.991829	5.268248E-07	1.069210E-08
18	1.6565	1.187566E-07	0.969379	1.917359E-07	-8.733434E-09
19	1.7445	3.402496E-08	0.959003	6.840481E-08	-5.985456E-09
20	1.8256	9.556561E-09	0.972205	2.206446E-08	-2.724136E-09
21	1.9003	2.665805E-09	0.970526	6.652448E-09	-1.031351E-09
22	1.9692	7.445654E-10	0.957306	2.176437E-09	-3.526068E-10
23	2.0353	2.050525E-10	0.979358	7.747528E-10	-1.149102E-10

Del análisis de los resultados obtenidos surge que para  $a = 2 \cdot 10^{-2}$  todas las correcciones que disminuyen  $h$  se deben a la necesidad de mantener acotado el error local en  $\varepsilon = 10^3$ . Los valores de  $h$  resultantes son suficientes para verificar la condición de convergencia. En el caso de  $a = 2 \cdot 10^{-10}$ , las correcciones son efectuadas solamente para poder satisfacer la condición necesaria de convergencia, ya que el error local siempre es menor que la cota  $\varepsilon$ . Para valores intermedios del coeficiente  $a$ , las correcciones se realizan para satisfacer las dos condiciones.

## 7. Conclusiones

Se ha demostrado para los métodos Runge-Kutta explícitos de orden  $p$ , que el supremo del error global es de orden  $p + 1$ . Si bien existen cotas superiores de orden menor a  $p + 1$  la menor de todas ellas pertenece a  $O(h^{p+1})$ . Es importante destacar que no debe confundirse el concepto de cota del error global con orden de convergencia del método, dado que éste debe analizarse a partir de la relación entre las soluciones con diferentes longitudes de paso  $h$  para el mismo punto  $x_n$  de la malla. El enfoque adoptado para la demostración del orden del error global ha permitido establecer de manera conceptualmente clara la condición necesaria de convergencia para todos los métodos Runge-Kutta, cuyo cumplimiento en ciertos problemas es imprescindible para obtener resultados confiables, tal como se muestra en el Ejemplo 3. Un algoritmo que contemple correcciones por los criterios de cota de error local de discretización y condición necesaria de convergencia permite mantener acotado el error global, así como también despreocuparse de proponer el valor de  $h$  adecuado para satisfacer la condición de convergencia.

## Referencias

- Atkinson, K. (1978). *An Introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Burden, R. L. y Faires, J. D. (1985). *Análisis numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Enright, W. H. (1989). A New Error-Control for Initial Value Solvers. *Applied Mathematics and Computation*, 31, 285301.
- Higham, D. J. (1991). Global Error versus Tolerance for Explicit Runge-Kutta Methods. *Journal of Numerical Analysis*, 11, 457480.
- Hull, T. E.; Enright, W. H.; Fellen, B. M. y Sedgwick, A.E. (1972). Comparing Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. *Journal of Numerical Analysis. SIAM*, 9(4), 603637.
- Isaacson, E. y Keller, H. B. (1994). *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications.

### **Carlos Marcelo Albarracín**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniero Mecánico Aeronáutico. Doctor en Ingeniería. Profesor adjunto regular de Análisis Numérico en la carrera Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta. Coautor de artículos publicados en revistas internacionales con referato. Actualmente codirige un proyecto de investigación del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (UNSa). Su investigación está orientada a las matemáticas aplicadas y a métodos numéricos y computacionales.

Correo electrónico: [cmalba@unsa.edu.ar](mailto:cmalba@unsa.edu.ar)

### **María Virginia Quintana**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniera Civil. Doctora en Ingeniería. Profesora titular de Métodos Numéricos de la carrera Ingeniería Civil en la Universidad Católica de Salta (UCASal). Es Investigadora Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el Instituto de Investigaciones para la Industria Química (INIQUI). Coautora de numerosos artículos publicados en revistas internacionales con referato. Es directora de proyectos de investigación y coordinadora de proyectos de vinculación tecnológica. Su investigación actual se centra en las matemáticas aplicadas y en los métodos computacionales, en la mecánica computacional, las vibraciones mecánicas y los materiales compuestos.

Correo electrónico: [mvquintana@ucasal.edu.ar](mailto:mvquintana@ucasal.edu.ar)



## Caudales de diseño en cuencas de la provincia de Salta

### Design flow discharges in basins of the province of Salta

Cecilia Botelli<sup>1</sup>, Nicolás Guillén<sup>2</sup>, Matías Eder<sup>2</sup>

---

*Ingeniería civil/ artículo científico*

Citar: Botelli, C.; Guillén, N. y Eder, M. (2022). Caudales de diseño en cuencas de la provincia de Salta. *Cuadernos de Ingeniería* (14). <http://revistas.ucasal.edu.ar>

*Recibido: septiembre/2022*

*Aceptado: diciembre/2022*

#### Resumen

Para poder dimensionar infraestructura hídrica en una localización es necesario contar con caudales de diseño asociados a diferentes tiempos de retorno. En la provincia de Salta, debido a que en la mayoría de las cuencas no se cuenta con registros históricos suficientes de caudales como para realizar un análisis estadístico de ellos, si se desean estimar los caudales e hidrogramas de diseño asociados a diferentes recurrencias es necesario aplicar un modelo de transformación lluvia-caudal; asociando los caudales a las recurrencias de las precipitaciones y, por ende, asumiendo que las tormentas de proyecto y los picos de caudales que estas generan poseen la misma recurrencia.

Este trabajo presenta el cálculo de caudales e hidrogramas de diseño en diferentes cuencas de interés de la provincia de Salta. La información que se presenta no pretende ser un reemplazo de las técnicas clásicas de análisis y procesamiento hidrológico sino un valor de referencia a nivel regional. Para generar la información de base se emplearon modelos de transformación lluvia-caudal, a partir de precipitaciones asociadas a diferentes probabilidades de ocurrencia (recurrencias). Se desarrollaron modelos hidrológicos en 17 cuencas de la provincia, generando así una importante base de datos (la cual será de suma utilidad en el futuro). Los resultados alcanzados resultan fundamentales para proyectar obras de infraestructura hídrica destinadas a mitigar el riesgo hídrico.

**Palabras clave:** hidrología de diseño, caudales de diseño, cuencas de Salta

---

<sup>1</sup> Universidad Católica de Salta.

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Córdoba.

## Abstract

In order to size water infrastructure in a location, it is necessary to have design flows associated with different return times. In the province of Salta, since most of the basins do not have sufficient historical flow records to perform a statistical analysis of them, if we wish to estimate the design flows and hydrographs associated with different recurrences it is necessary to apply a rainfall-flow transformation model; associating the flows to the rainfall recurrences and, therefore, assuming that the project storms and the flow peaks they generate have the same recurrence.

This work presents the calculation of flow rates and design hydrographs in different basins of interest in the

province of Salta. The information presented is not intended to replace the classical hydrological analysis and processing techniques, but to be a reference value at regional level. Rainfall-flow transformation models were used to generate the basic information, based on rainfall associated with different probabilities of occurrence (recurrences). Hydrological models were developed in 17 basins of the province, thus generating an important database (which will be extremely useful in the future). The results obtained are essential for the design of water infrastructure works to mitigate water risk.

**Keywords:** design hydrology, design flow discharges, Salta watersheds.

---

## 1. Introducción

Desde el punto de vista humano, el agua tiene un impacto positivo si se la considera como un recurso natural que puede utilizarse con fines domésticos, industriales, agrícolas, mineros, o recreativos, entre otros. A la vez, también puede tener un impacto negativo si se habla de los fenómenos naturales que pueden convertirse en amenazas hídricas (por ejemplo, inundaciones) para seres vivos, suelos, infraestructura, etc.

Para el aprovechamiento sustentable del recurso hídrico (problema de regulación de aportes continuos a largo plazo) y para mitigar los efectos de amenazas hídricas (problema de control de eventos extremos), se debe proceder a desarrollar medidas estructurales (infraestructura) y medidas no estructurales (medidas de gestión, disposiciones legales y reglamentarias, normas de operación, etc.).

El diseño sustentable de estas medidas estructurales y no estructurales se define como el diseño consistente con los principios del desarrollo global sustentable, el cual prevé un desarrollo que satisface las necesidades presentes sin comprometer la capacidad de futuras generaciones de satisfacer sus propias necesidades (World Commission on Environment and Development, 1987). Un sobredimensionamiento de las medidas genera un impacto innecesario sobre el medioambiente y resulta antieconómico, en tanto que si se subestiman estas medidas pueden fallar con resultados catastróficos, con un impacto aun mayor para la sociedad y el medioambiente, tanto por la pérdida de vidas humanas como de bienes públicos y privados. En este marco, el diseño sustentable de las medidas estructurales y no estructurales requiere de un estudio integral que complemente los siguientes aspectos: (a) diseño hidrológico que consiste en la definición precisa de las variables hidrológicas de diseño (por ejemplo, caudal); (b) diseño hidráulico óptimo que contemple la compleja interacción de los flujos turbulentos con el lecho, márgenes, vegetación, infraestructura hídrica existente o nueva, etc.

La modelación hidrológica e hidráulica para la toma de decisiones se enmarca dentro del programa HOMS (por su sigla en inglés), esto es, el Sistema de Hidrología Operativa para Fines Múltiples, un programa creado por la Organización Meteorológica Mundial para la transferencia de tecnología en hidrología y los recursos hídricos (World Meteorological Organization, 1972). Esta tecnología se encuentra normalmente en la forma de descripciones de instrumentos hidrológicos, manuales técnicos o programas de computador, material que ha sido ofrecido para ser incorporado al HOMS por los servicios hidrológicos de los países miembros de la Organización Meteorológica Mundial (OMM) a partir de las técnicas que ellos mismos usan en sus operaciones de rutina. Este es un aspecto importante de la filosofía del HOMS, dado de que asegura que la tecnología transferida no solo está lista para ser utilizada, sino también que funciona de manera confiable.

Este trabajo resume resultados obtenidos en la línea de trabajo relacionada con el diseño hidrológico de infraestructura hídrica, para lo cual se realizó un estudio detallado de cuencas de interés en la provincia de Salta y se calcularon hidrogramas de diseño asociados a diferentes recurrencias en cuencas hídricas para, posteriormente, ser utilizados para proyectar infraestructura hídrica (estructurales o no estructurales) que mitigue el riesgo hídrico.

Para el logro de tal fin se implementaron modelos computacionales de simulación hidrológica e hidráulica en cuencas, para calcular los hidrogramas de diseño en las diferentes cuencas hídricas.

Para poder implementar los modelos de transformación lluvia-caudal es fundamental contar con un adecuado estudio de lluvias de diseño. En este sentido, en los últimos años se ha avanzado en la Argentina en el desarrollo de una aplicación en línea que permite visualizar, de una manera directa e intuitiva, los mapas de valores de lluvias extremas requeridas para el diseño hidrológico de obras hidráulicas de pequeña y mediana envergadura en la porción continental del país (Catalini et. al, 2021). En esa aplicación se visualizan los valores estimados de precipitación máxima diaria (PMDT) para diferentes periodos de retorno, y el valor límite estimado de precipitación (VELP) —denominado habitualmente como precipitación máxima probable (PMP)—.

En lo referido a caudales e hidrogramas de diseño, estos son los datos fundamentales e imprescindibles a la hora de dimensionar cualquier medida estructural o no estructural para mitigar el riesgo ante una amenaza hídrica. Si no se cuenta con caudales de diseño (y por ende, hidrogramas) estimados de manera adecuada, las futuras obras o medidas proyectadas seguramente estarán mal diseñadas, lo que ocasionará problemas futuros de gran magnitud.

## **2. Estimación de caudales de proyecto en cuencas de la provincia de Salta**

Debido a que no se cuenta con registros históricos suficientes de caudales en las cuencas de estudio como para realizar un análisis estadístico de ellos, se realizó un estudio hidrológico aplicando un modelo de transformación lluvia-caudal y se asociaron los caudales a las recurrencias de las precipitaciones, asumiendo que las tormentas de proyecto y los picos de caudales que estas generan poseen la misma recurrencia.

Es fundamental recalcar que la principal hipótesis que se tiene en cuenta cuando se aplica esta metodología es que una lluvia asociada a una recurrencia “X” genera un evento de caudal de igual recurrencia “X”. Asumir esto es muy discutible, dado que el hidrograma generado en

una cuenca no solo depende de la lluvia precipitada sobre ella, sino que también dependerá de las condiciones de humedad en la cuenca, de la distribución espacial y temporal de la lluvia, así como de los efectos orográficos. A pesar de esta fuerte limitación e hipótesis, en cuencas pobremente aforadas como las que se presentan en este trabajo no existe una metodología más adecuada que la que aquí se propone.

En este apartado se presentan los principales resultados alcanzados con relación al cálculo del caudal de proyecto asociado a recurrencias entre 2 y 100 años en cada una de las cuencas de estudio. El estudio hidrológico se realizó aplicando el método del hidrograma unitario (debido a que el área de la cuenca supera los 2 km<sup>2</sup>). Para el cálculo de la intensidad de precipitación se utilizaron las curvas intensidad-duración-recurrencia, calculadas a partir del modelo DIT (Caa-maño y Dasso, 2003). La definición de las cuencas y sus parámetros principales se realizó a partir de información topográfica satelital del modelo digital de elevación provisto por el Instituto Geográfico Nacional (IGN).

## 2.1 Modelos hidrológicos de transformación lluvia-caudal

Actualmente, existen modelos hidrológicos e hidráulicos para manejo de cuencas que permiten la simulación, con un muy buen nivel de detalle, de los eventos hidrológicos que ocurren.

La modelación hidrológica es una herramienta fundamental en la gestión sostenible de cuencas tanto urbanas como rurales (una cuenca es un territorio cuyas aguas afluyen todas a un mismo río, lago o mar). Por lo general, la modelación hidrológica involucra la identificación de subcuencas o unidades de respuesta hidrológica. Esto se hace con la ayuda de los sistemas de información geográfica. Típicamente, las fases del ciclo hidrológico (esto es, precipitación, infiltración, escorrentía y agua subterránea) se caracterizan para cada una de estas unidades y con ello se generan los datos de entrada de los modelos dinámicos de simulación. Estos se utilizan para simular la respuesta de los procesos hidrológicos a cambios en las condiciones ambientales, por ejemplo, el incremento de la precipitación y la escorrentía, junto con la disminución de la infiltración a causa del crecimiento urbano. Típicamente, los resultados se utilizan en la planeación y el manejo de las obras hidráulicas, así como en el diseño de protocolos de protección civil.

A su vez, la modelación de los sistemas hidráulicos como herramienta de diseño, revisión y toma de decisiones es actualmente una técnica indispensable dentro de las prácticas modernas de la ingeniería civil. Para emplearla adecuadamente es necesario considerar conceptos que permitan optimizar recursos humanos, materiales y, como consecuencia, económicos.

Es sumamente común que no se cuente con registros adecuados de escurrimiento en el sitio de interés para determinar los parámetros necesarios para el diseño y la operación de obras hidráulicas. En general, los registros de precipitación son más abundantes que los de escurrimiento y, además, no se afectan por cambios en la cuenca —como construcción de obras de almacenamiento y derivación, talas, urbanización, etc.—. Por ello, es conveniente contar con métodos que permitan determinar el escurrimiento en una cuenca mediante sus características y la precipitación. Las características de la cuenca se conocen por medio de planos topográficos y de uso de suelo; la pre-

precipitación, a través de mediciones directas en el caso de predicción de avenidas frecuentes, o bien usando el concepto de lluvia de diseño.

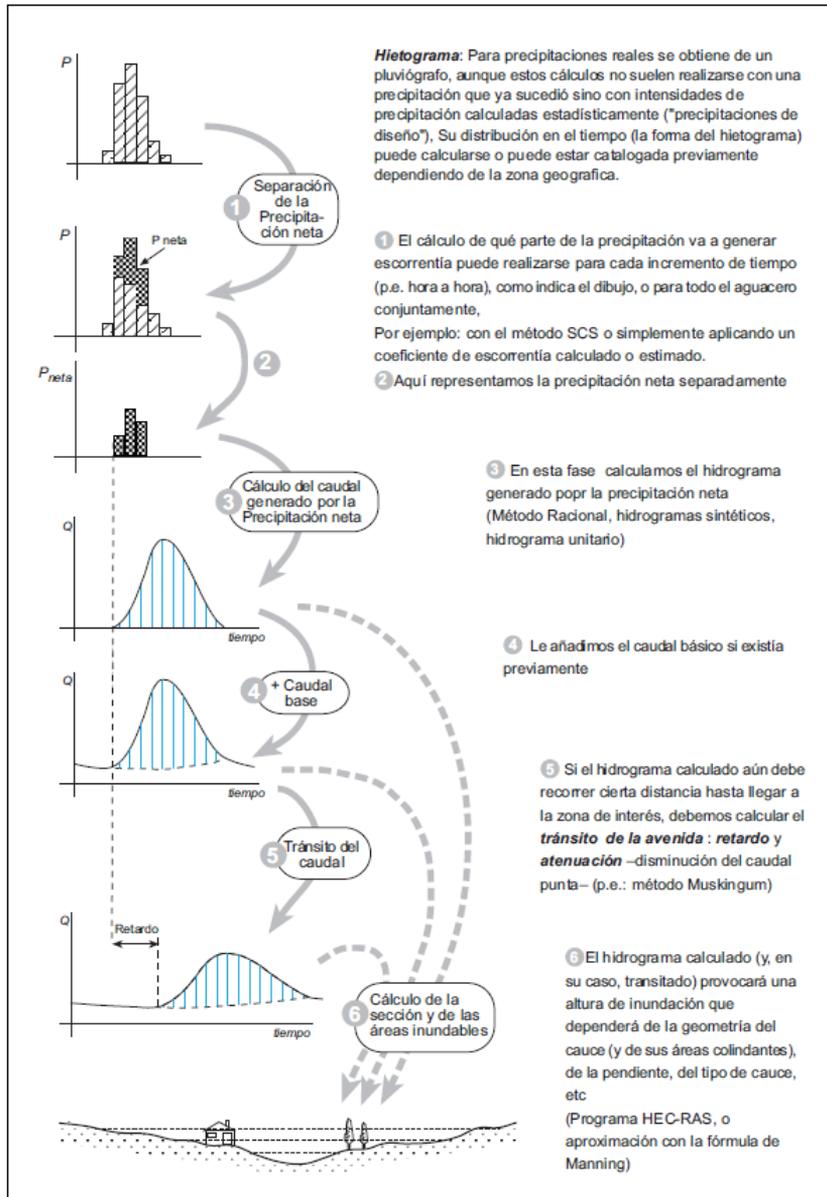
Los principales parámetros que intervienen en el proceso de conversión de lluvia a escurrimiento son los siguientes:

1. Área de la cuenca.
2. Altura total de precipitación.
3. Características generales o promedio de la cuenca (forma, pendiente, vegetación, etc.).
4. Distribución de la lluvia en el tiempo.
5. Distribución en el espacio de la lluvia y de las características de la cuenca.

Debido a que, por un lado, la cantidad y la calidad de la información disponible varían grandemente de un problema a otro y a que, por otro, no siempre se requiere la misma precisión en los resultados, se han desarrollado una gran cantidad de métodos para analizar la relación lluvia-escurrecimiento. Algunos de los métodos son:

- a) Métodos de envoltentes: estos métodos toman en cuenta solo el área de la cuenca. Aunque no son métodos que analicen propiamente la relación entre la lluvia y el escurrimiento, son útiles para poder realizar estimaciones aproximadas de los gastos máximos probables, o bien cuando se carezca casi por completo de información.
- b) Método racional: la fórmula racional es posiblemente el modelo más antiguo de la relación lluvia-escurrecimiento. Su origen se remonta a los años 1851 o 1889, de acuerdo con diversos autores. Este modelo toma en cuenta, además del área de la cuenca, la altura o intensidad de la precipitación y es hoy en día muy utilizado, particularmente en el diseño de drenajes urbanos.
- c) Hidrograma unitario: el método fue desarrollado originalmente por Sherman en 1932, y está basado en las siguientes hipótesis:
  - Tiempo base constante. Para una cuenca dada, la duración total de escurrimiento directo o tiempo base es la misma para todas las tormentas con la misma duración de lluvia efectiva, independientemente del volumen total escurrido. Todo hidrograma unitario está ligado a una duración de la lluvia en exceso.
  - Linealidad o proporcionalidad. Las ordenadas de todos los hidrogramas de escurrimiento directo con el mismo tiempo base son directamente proporcionales al volumen total de escurrimiento directo, es decir, al volumen total de lluvia efectiva. Como consecuencia, las ordenadas de dichos hidrogramas son proporcionales entre sí.
  - Superposición de causas y efectos. El hidrograma que resulta de un periodo de lluvia dado puede superponerse a hidrogramas resultantes de periodos lluviosos precedentes.

Esta es la metodología que se implementó en el presente estudio. La Figura 1 muestra un esquema de las fases de proceso de transformación lluvia-caudal.



**Figura 1.** Esquema de la metodología de transformación lluvia-caudal empleando el método del hidrograma unitario.

## 2.2 Metodología empleada

A continuación, se presenta en forma sintética la metodología propuesta a aplicar para el caso de diseño hidrológico mediante un modelo de transformación lluvia-caudal cuando se cuenta con series estacionarias de precipitación máxima diaria anual (Baraquet, 2018).

- I. Delimitación de cuenca: por medio de un modelo digital de terreno (DEM) obtenido de información satelital o topografía de detalle relevada in situ se procede a delimitar la cuenca y las subcuencas.

En función del tipo de dato con que se cuente será la exactitud de la delimitación de cuenca resultante. Aunque la naturaleza digital y simbólica de los DEM permite una elevada precisión en la descripción de los procesos, no garantiza la exactitud de los resultados, principalmente en zonas de llanura.

Generalmente los DEM funcionan adecuadamente en cuencas de pendientes medias del orden de 1 %, no pasa lo mismo en cuencas de llanura. En este último caso, para la delimitación de las cuencas es necesario conocer otra información (tal como rutas existentes, vados, imágenes satelitales) la cual ayudará a conocer las posibles divisorias de aguas o escurrimientos hídricos.

- II. Determinación de parámetros morfométricos de la cuenca: se definen áreas, pendientes de las cuencas, longitudes y pendientes de cauces principales, tipos de suelo y vegetación, etc.
- III. Determinación de parámetros hidrológicos del modelo: con base en la información recopilada en el lugar de estudio se definen abstracciones iniciales, tiempos de concentración, tiempos de retardo, métodos de tránsito, y parámetros de pérdidas de cada subcuenca.
- IV. Calibración de parámetros hidrológicos: se calibran los parámetros del modelo en función de la información sobre precipitaciones y caudales observados que se tenga disponible de la zona de estudio.
- V. Lluvia de diseño: se definen aquí las lluvias de diseño que serán incorporadas al modelo de transformación lluvia-caudal. Se analiza tanto la magnitud de la lámina como su distribución temporal y espacial.
- VI. Simulación hidrológica: se modela la cuenca de interés con los parámetros antes definidos para obtener los caudales de diseño.
- VII. Resultados de la simulación: se presentan los hidrogramas obtenidos para diferentes tiempos de retorno en la cuenca modelada.

## 3. Aplicación a la cuenca del Río Vaqueros

Se realizaron múltiples modelaciones hidrológicas en diferentes cuencas de interés de la provincia. A modo de ejemplo se presenta detalladamente una de ellas, la del Río Vaqueros.

### 3.1 Recopilación de información topográfica en la zona de estudio

Para la determinación de las curvas de nivel, la delimitación de las cuencas y subcuencas de la zona de estudio y de los cauces existentes en el presente trabajo se utilizó información satelital de modelos digitales de elevaciones (DEM, por sus siglas en inglés). Un DEM es una estructura numérica de datos topográficos que representa la distribución espacial de la altitud (cota) con respecto al nivel medio del mar, y que permite caracterizar las formas del relieve y los elementos u objetos presentes en una determinada topografía. En este trabajo en primer lugar se recopilieron diferentes fuentes disponibles de modelos de elevación, las cuales se presentan a continuación:

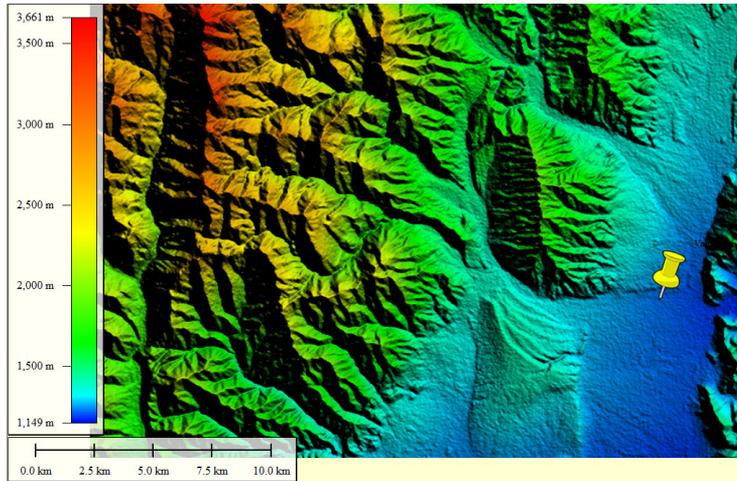
1. The Shuttle Radar Topography Mission (SRTM), presenta datos topográficos 3D del terreno en una escala global de 56° S a 60° N, para generar la base de datos topográficos digitales de alta resolución. Tiene una resolución planimétrica de 90 a 30 m según la zona de cobertura.
2. Advanced Spaceborne Thermal Emission and Reflection Radiometer (ASTER), es un instrumento de imagen a bordo de Terra, un satélite del Sistema de Observación de la Tierra (EOS, por sus siglas en inglés) de la National Aeronautics and Space Administration (NASA). El DEM utilizado tiene una resolución de 30 a 15 m.
3. Modelo MDEAr v2.0 del Instituto Geográfico Nacional (IGN): A partir de una combinación de datos capturados por las misiones satelitales SRTM y ALOS, el IGN llevó adelante el desarrollo del modelo MDEAr v2.0, que cubre la totalidad del territorio continental nacional, y cuya referencia vertical coincide con el Sistema de Referencia Vertical Nacional (SRVN16).

La misión SRTM fue un proyecto internacional llevado a adelante en el año 2000 por la NASA en cooperación con el Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), la Agenzia Spaziale Italiana (ASI) y el National Geospatial Intelligence Agency (NGA), con el propósito de obtener un modelo digital de elevaciones global de alta resolución y calidad uniforme a partir de datos recolectados con la técnica de interferometría radar de apertura sintética (InSAR, por sus siglas en inglés).

La misión ALOS, llevada adelante por la Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA), permitió el desarrollo de un modelo digital de elevaciones a escala global a partir de la utilización de aproximadamente 3 millones de imágenes adquiridas mediante un instrumento pancromático de teledetección para mapeo estéreo (PRISM, por sus siglas en inglés) instalado en el satélite japonés de observación terrestre “DAICHI”.

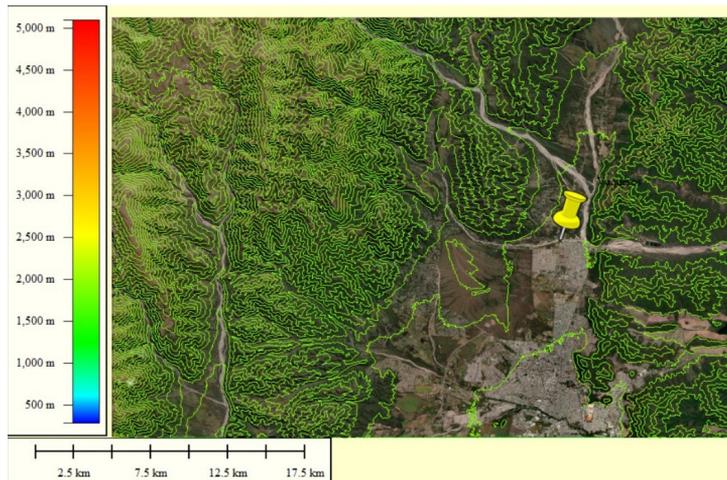
El MDEAr v2.0 que distribuye el IGN tiene una resolución espacial de 30 m y una precisión vertical de aproximadamente 2 m.

Debido a su resolución espacial y a su precisión es que este modelo se utilizó en el presente trabajo para realizar la determinación de las curvas de nivel, la delimitación de las cuencas y la definición de los cauces existentes. En la Figura 2 se presenta el modelo digital de la zona de estudio:



**Figura 2.** DEM MDEAr v2.0 del Instituto Geográfico Nacional (IGN) de la zona de estudio.

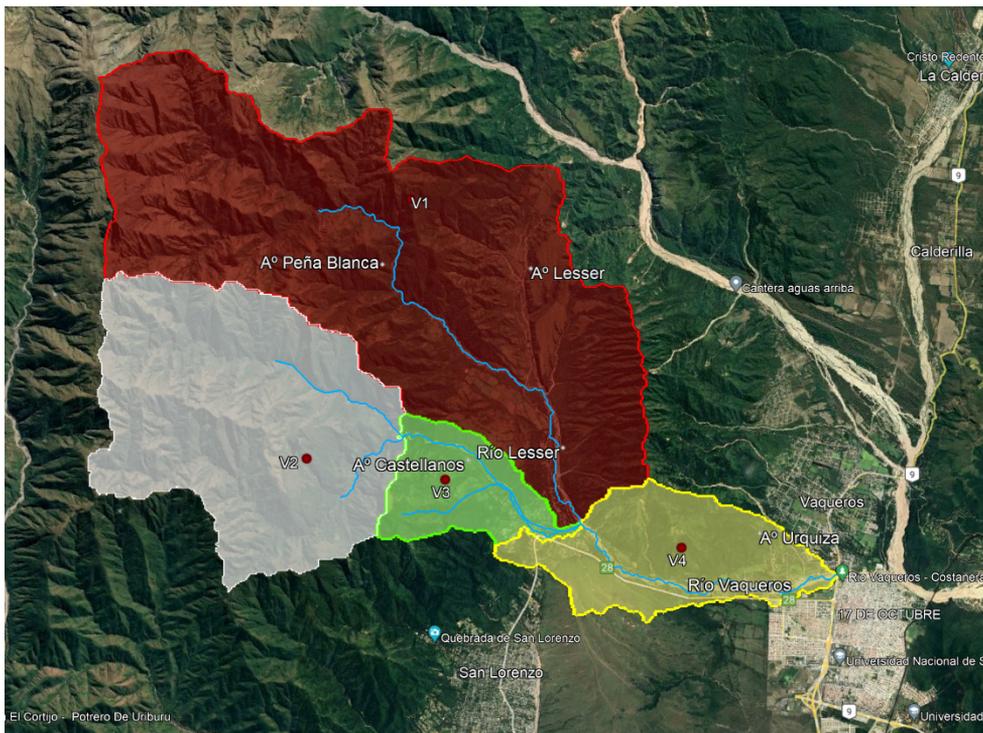
A partir de la utilización del DEM del IGN, se determinaron las curvas de nivel con un intervalo de 100 m en la zona de estudio, las cuales se observan en la Figura 3:



**Figura 3.** Curvas de nivel en la zona de estudio utilizando el modelo digital de elevación DEM MDEAr v2.0 del IGN.

### 3.2 Delimitación de cuencas y cauces existentes en la zona de estudio

A partir de la utilización del DEM MDE-Ar v2.0 de alta resolución del IGN, se delimitaron las cuencas y cauces existentes que aportan escurrimientos superficiales al punto de estudio donde actualmente existe el puente sobre la ruta nacional 9 (Figura 4).

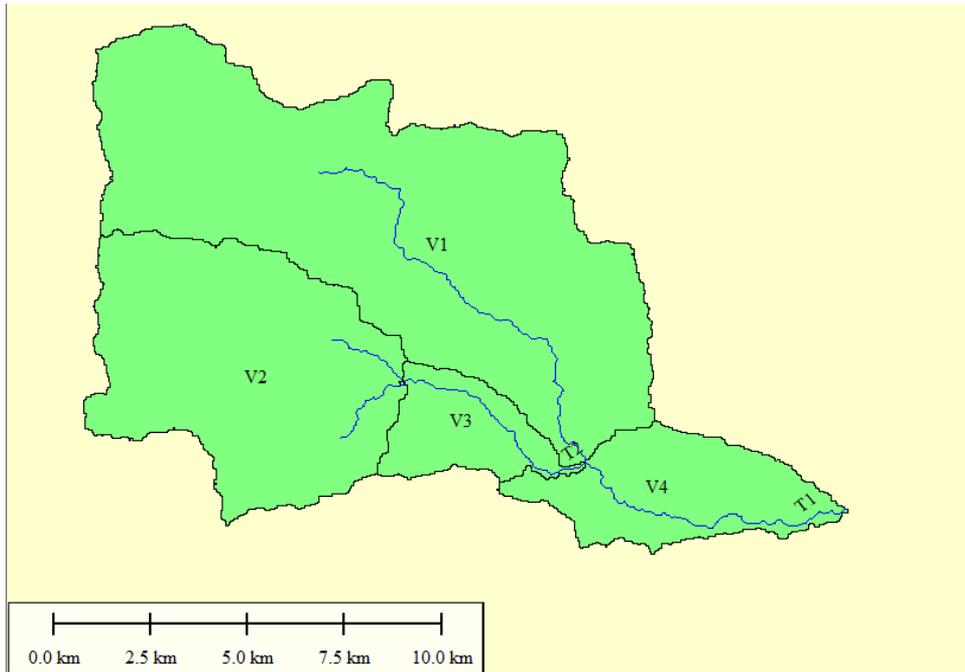


**Figura 4.** Principales subcuencas y cauces principales superpuestos con una imagen satelital del terreno.

### 3.3 Características de la cuenca de estudio

La cuenca de estudio completa tiene una superficie de 134 Km<sup>2</sup>. Las subcuencas (áreas tributarias) que conforman la cuenca se definieron a partir de la información topográfica satelital provista por el modelo digital de elevación del IGN y se complementó el análisis mediante la visualización de la zona de estudio con imágenes satelitales de alta resolución. En la

Figura 5 se presentan las subcuencas y sus respectivos cauces principales, con la nomenclatura adoptada.



**Figura 5.** Principales subcuencas y cauces principales junto con la nomenclatura adoptada en cada una de las subcuencas de estudio.

Los parámetros principales de las subcuencas se indican en la Tabla 1.

**Tabla 1.** Parámetros principales de cada una de las subcuencas

Subcuenca	Área [km <sup>2</sup> ]	Cauce principal		
		$L$ [m]	$\Delta H$ [m]	$S$ [m/m]
V1	71.4	19438	1681	0.0865
V2	38.6	9690	1365	0.1409
V3	8.5	5050	756	0.1497
V4	15.2	7470	441	0.0590

Donde:

Área: área de las subcuencas.

$L$ : longitud del cauce principal de las subcuencas.

$\Delta H$ : desnivel máximo del cauce principal de las subcuencas.

$S$ : pendiente del cauce principal de las subcuencas.

Para el cálculo de los tiempos de concentración ( $TC$ ) de las subcuencas; Roussel et al. (2005) concluyen que generalmente es adecuada la ecuación de Kirpich y, en particular, la ecuación de Kerby-Kirpich para estimar el tiempo de la concentración de una cuenca. Esta ecuación produce estimaciones de tiempo de concentración consistentes con valores obtenidos en cuencas que fueron calculados a partir de tormentas reales e hidrogramas de escorrentía. Al aplicar este método para el cálculo de  $TC$ , el tiempo total de concentración se obtiene sumando el tiempo de flujo superficial en lámina 1 (Kerby) y el tiempo de flujo en canal (Kirpich):

$$TC = t_0 + t_c \quad (1)$$

Donde:

$$t_0 = K_0 (L_0 \cdot N)^{0,467} S_0^{-0,235} \quad (2)$$

$$t_c = K_c L_c^{0,77} S_c^{-0,385} \quad (3)$$

$K_0$ : coeficiente de conversión de unidades. Es igual a 1.44 para unidades del sistema internacional (SI).

$K_c$ : coeficiente de conversión de unidades. Es igual a 0.0195 para unidades del sistema internacional (SI).

$L_0$ : longitud del flujo superficial (o flujo en láminas).

$L_c$ : longitud del flujo en canal.

$S_0$ : pendiente de la cuenca adimensional en la zona de flujo superficial (en el caso analizado, es igual a  $S$ ).

$S_c$ : pendiente de la cuenca adimensional en la zona de flujo en canal (en el caso analizado, es igual a  $S$ ).

$N$ : coeficiente de retardo del flujo. Su valor se obtiene de tablas.

A su vez, en cuencas hidrográficas con baja pendiente topográfica (plana), el cálculo de  $TC$  usando ecuaciones comúnmente aceptadas con el valor de pendiente de la cuenca en el denomina-

dor a menudo resulta en valores excesivamente grandes. Es decir, como la pendiente se aproxima a cero, el tiempo de concentración se aproxima al infinito. Además, debido a que la intensidad es función de la lámina de lluvia ( $h$ ) dividida por la duración  $d$  (que es aproximadamente igual a  $TC$ ),  $TC$  finalmente genera en la cuenca una muy pequeña intensidad y, por lo tanto, un caudal de salida de la cuenca de poca magnitud. En estos casos, Cleveland et al. (2012) recomienda un ajuste de 0.0005 a la pendiente, tanto en los métodos de Kerby como de Kirpich, para permitir resultados más realistas en las cuencas de baja pendiente topográfica.

La pendiente ajustada de la cuenca quedaría:

$$S = S_0 + 0,0005 \text{ (adimensional)} \quad (4)$$

Siendo la pendiente ajustada la que debe introducirse en las fórmulas de Kerby y Kirpich previamente desarrolladas.

Finalmente, para el caso analizado los valores de  $TC$  estimados fueron:

**Tabla 2.** Tiempos de concentración de cada una de las subcuencas

Subcuenca	$TC$ [min]
V1	120
V2	58
V3	38
V4	70

Para los tránsitos se utiliza el método de Muskingum, que se vale de dos parámetros:  $K$  y  $X$ .  $K$  puede asimilarse igual al tiempo de recorrido de la onda cinemática de un extremo al otro del tramo estudiado, y  $X$  es una constante que vale entre 0 y 0.5.

A mayor valor de  $X$  menor es la amortiguación del hidrograma a lo largo del tramo del cauce. En la Figura 6 se presenta la nomenclatura adoptada para cada uno de los tránsitos:



**Figura 6.** Principales subcuencas y cauces principales junto con la nomenclatura adoptada en cada uno de los tramos de tránsito de caudales en la cuenca de estudio.

Para cada uno de los tramos transitados se usaron los parámetros de Tabla 3.

**Tabla 3.** Parámetros del modelo de tránsito de Muskingum de cada uno de los tramos

Tramos	$X$	$K$ [hs]
T1	0.3	0.46
T2	0.3	0.24

Debido a la pendiente de los tramos se adoptó un coeficiente  $X$  igual a 0.3, mientras que el valor de  $K$  se estimó en función de la longitud de los tramos y la velocidad que puede tomar una onda de crecida en cada uno de ellos.

Para el cálculo de las pérdidas en las subcuencas se utiliza el método del SCSCN. Este método utiliza dos parámetros:  $CN$  e infiltración inicial ( $I_a$ ); pero este último se obtiene a partir del valor de  $CN$  con la siguiente ecuación:

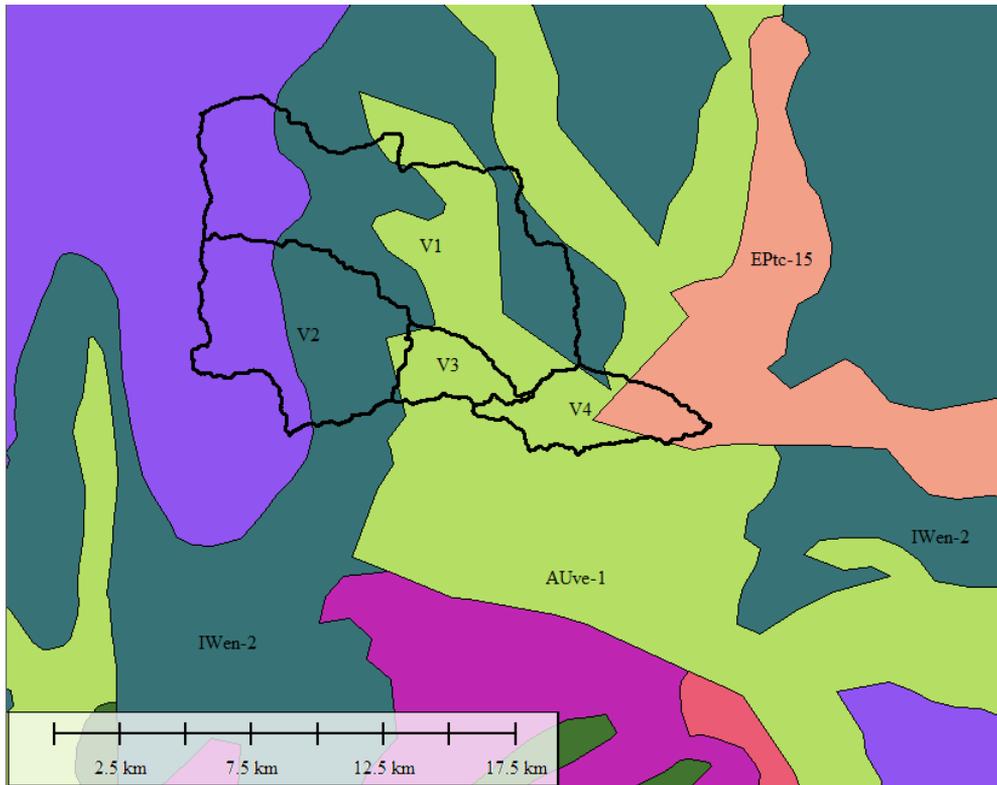
$$I_a [mm] = \left( \frac{25400}{CN} - 254 \right)^{0.55} . \quad (5)$$

Para definir los valores de curva número ( $CN$ ) de las subcuencas se necesitan datos de uso y tipo de suelo.

Para el tipo de suelo, se tiene en cuenta que según el método de pérdidas del SCSCN los tipos de suelo se dividen en cuatro categorías. A continuación se caracteriza cada una de ellas:

- Grupo A: arena profunda, suelos profundos depositados por el viento, limos agregados.
- Grupo B: suelos poco profundos depositados por el viento, marga arenosa.
- Grupo C: margas arcillosas, o bien arenosas poco profundas, suelos con bajo contenido orgánico y con alto contenido de arcilla.
- Grupo D: suelos que se expanden significativamente cuando se mojan, arcillas altamente plásticas y ciertos suelos salinos.

Del SIG de la base de datos “Suelos de la República Argentina - Escala 1500 000” del INTA, se extrajo la siguiente carta de suelos de la zona de estudio:



**Figura 7.** Tipos de suelo en el área de estudio.

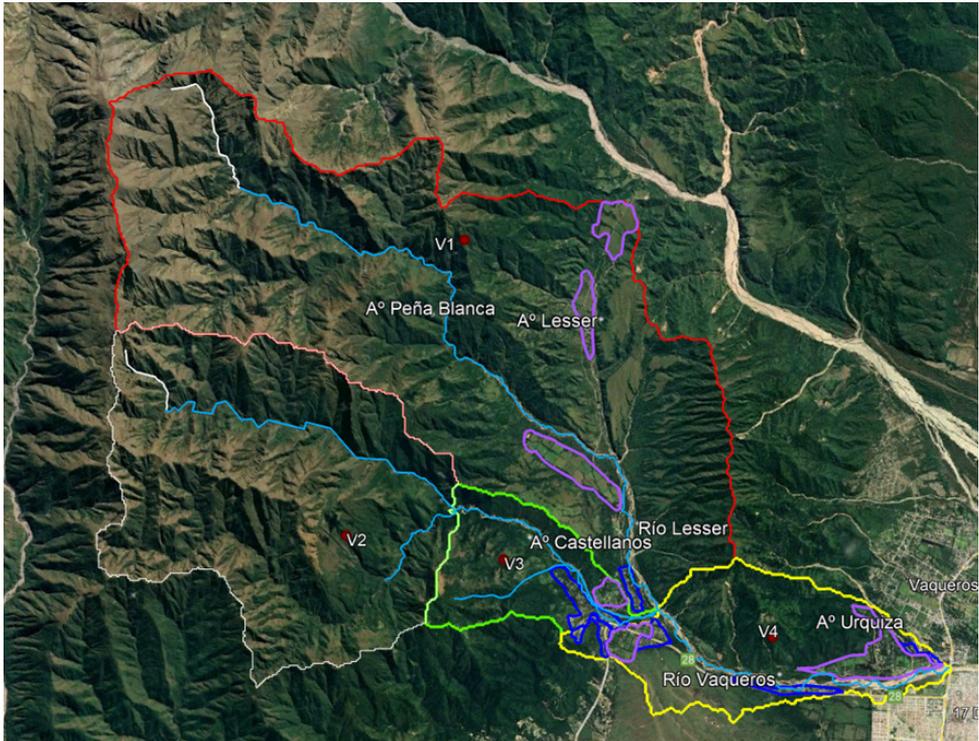
Al analizar la última figura se observa que en la zona de estudio existen los siguientes tipos de suelo:

- IWen-2: está compuesto por suelos de pendiente escarpada, franco limo gravillo, bien drenado.
- EPLi-25: está compuesto por suelos rocosos.
- AUve-1: está compuesto por suelos francoarcillosos.
- EPtc-15: está compuesto por suelos arenogrillosos con drenaje excesivo.

Estos suelos son de tipo B según la clasificación del SCS.

Para el uso del suelo se realizó un análisis de imágenes satelitales del terreno. Si se observa una imagen satelital de la cuenca, se observan zonas bien diferenciadas (Figura ):

- En las zonas de la cuenca con mayores altitudes se observan suelos desnudos de afloramientos rocosos, los cuales coinciden con la zona de la cuenca alta.
- En la zona baja de la cuenca aparecen áreas de depósitos de suelos arenosos y médanos, las cuales coinciden con las zonas de menor pendiente y depósito de sedimentos. En ellas se observan áreas con pastizales y cultivables.



**Figura 8.** Uso de suelo en el área de estudio.

Los valores estimados de *CN* a partir de los usos y tipos de suelo de cada una de las subcuencas se presentan a continuación:

**Tabla 4.** Parámetros del modelo de pérdidas del SCSCN de cada una de las subcuencas

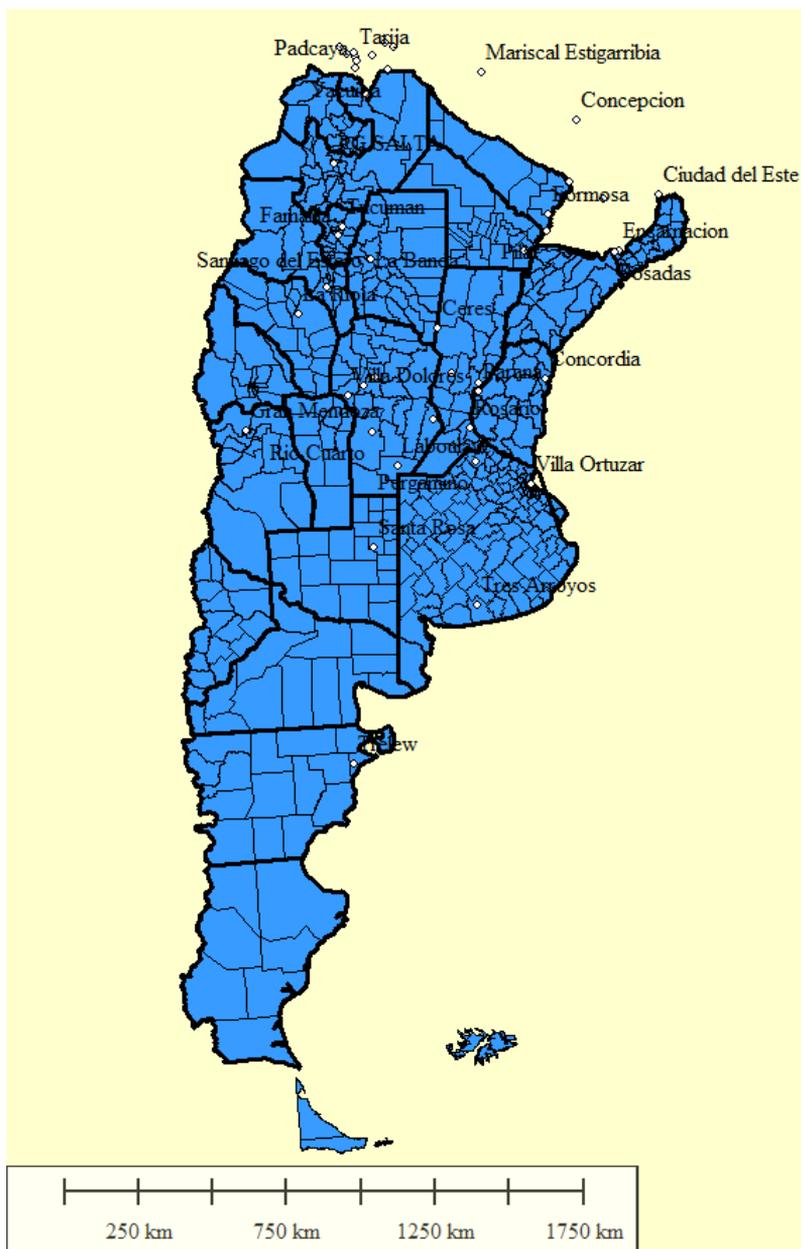
Subcuenca	<i>CN</i>
V1	73
V2	72
V3	66
V4	67

Vale aclarar que todas las modelaciones se realizaron considerando como referencia la condición de humedad antecedente II (condición intermedia).

### 3.4 Lluvia de diseño

#### 3.4.1 Cálculo de la curva IDT

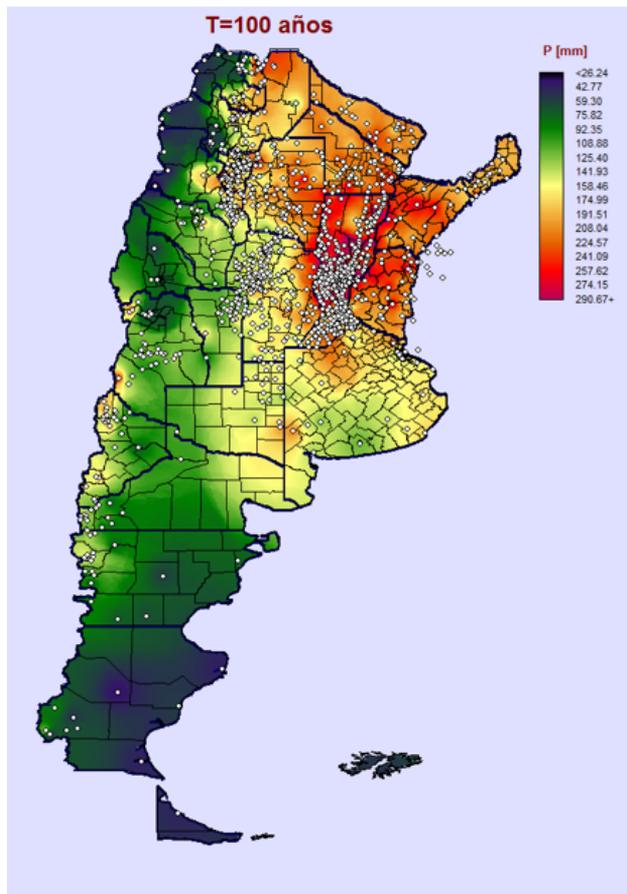
La probabilidad de ocurrencia de una lluvia depende de su persistencia o duración, por lo que hace falta establecer la relación entre tres variables: la intensidad ( $i$ ), la duración ( $d$ ), y el período de retorno ( $T$ , inversamente relacionado con la probabilidad de ocurrencia), las cuales requieren para su construcción de registros continuos (pluviografía), escasos en la Argentina (al igual que en muchos lugares del mundo), tanto por su cobertura espacial como por la extensión temporal de sus series. Estas curvas o relaciones están disponibles en menos de 29 localidades en Argentina, las cuales se muestran en la Figura 8:



**Figura 8.** Localización de las estaciones pluviográficas en la Argentina y en países limítrofes.

Esta información será transpuesta a localidades más cercanas a la zona de estudio (donde se encuentren disponibles registros pluviométricos históricos) regionalizando la información pluviográfica con técnicas apropiadas, asumiendo que esta estación pluviográfica y la estación pluviométrica se encuentran en una zona meteorológicamente homogénea, de acuerdo con lo propuesto por Caamaño y Dasso, 2003.

Dentro del marco del proyecto nacional “Estimación de láminas de lluvias máximas diarias y sus parámetros estadísticos en Argentina” (Guillén et al., 2018), se han analizado más de 1500 estaciones pluviométricas en la Argentina, las cuales se presentan en la Figura 9:



**Figura 9.** Localización de las estaciones pluviométricas en la Argentina superpuestas con el mapa de láminas de lluvia máximas diarias asociadas a 100 años de tiempo de retorno (Guillén et al., 2018).

Para la transposición de la información se utilizará el algoritmo denominado DIT (Caamaño y Dasso, 2003) que parametriza el rol de la lluvia diaria en el vínculo  $i-d-T$  y permite transponerlo como una superficie tridimensional continua. El modelo DIT plantea al logaritmo de la intensidad como una función lineal del factor de frecuencia  $\mathcal{O}_y$ , y de un factor de persistencia  $\delta_y$ , vinculados mediante dos parámetros locales, propios de la estación de medición,  $A$  y  $C$ , y uno zonal,  $B$ :

$$\ln i_{d,T} = A \cdot \mathcal{O}_y - B \cdot \delta_y + C. \quad (6)$$

Siendo:

$$\mathcal{O}_y = 2,584458 \cdot (\ln T)^{\frac{3}{8}} - 2,252573 \quad (7)$$

$$\delta_y = (\ln d)^{\frac{5}{3}} \quad (8)$$

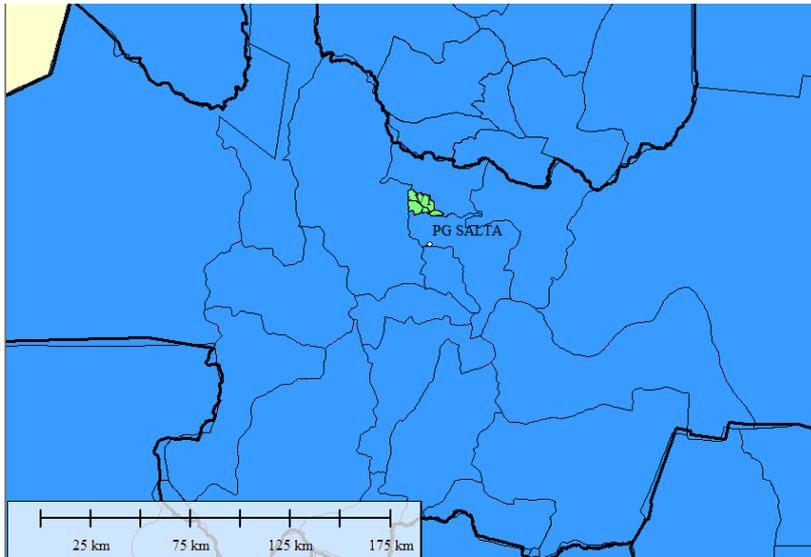
Los parámetros de este algoritmo, llamado DIT de aquí en adelante, son  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y el exponente  $q=5/3$  de la ecuación (8). La estimación de este último en las estaciones de ensayo del modelo arrojó valores próximos a  $5/3$ , lo que será adoptado aquí como constante. Lógicamente, la bondad de ajuste decae por perder flexibilidad; pero como sigue siendo muy buena, la mejora en la parsimonia del modelo justifica suprimir un parámetro.

Más allá de su carácter conceptual y su buen desempeño numérico, la gran ventaja del DIT es la forma explícita en que los parámetros locales  $C$  y  $A$  se transforman en  $C'$  y  $A'$ , al transponer la función  $i-d-T$  de un pluviógrafo cercano a un pluviómetro (estación pluviométrica cercana a la cuenca analizada), dentro de una zona meteorológicamente homogénea, donde  $B$  y  $q$  son constantes. Basta con sustituir la media,  $\mu$ , y el desvío estándar,  $\sigma$ , de los logaritmos de la serie pluviográfica diaria por los homólogos de la pluviométrica,  $\mu'$  y  $\sigma'$ , según las ecuaciones (4) y (5):

$$A' = A - \sigma + \sigma', \quad (9)$$

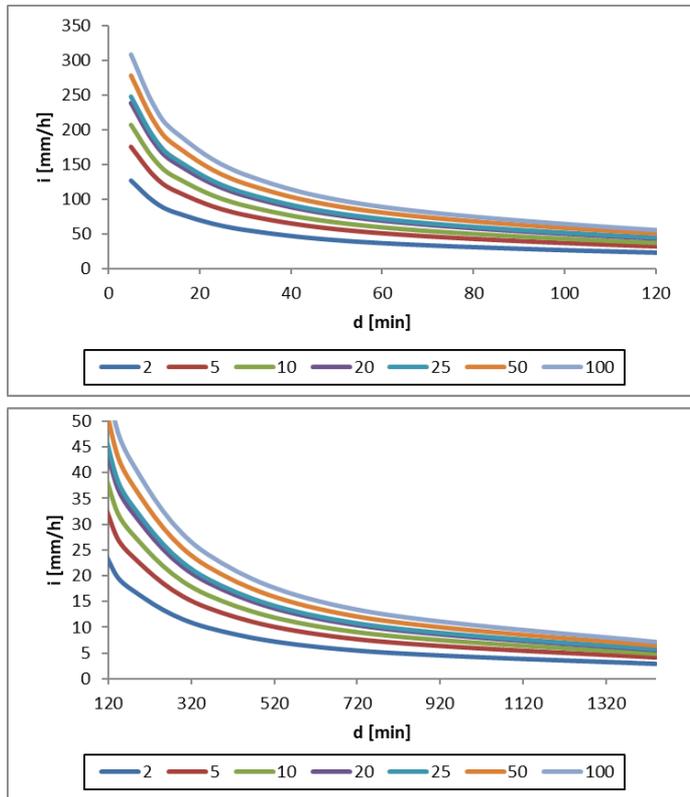
$$C' = C - \mu + \mu'. \quad (10)$$

Debido a la cercanía de la cuenca de estudio con la localidad de Salta capital, es que se procedió a utilizar la IDT estimada en esa localización en proyectos de investigación previos del grupo de trabajo (Guillén, 2016 y 2018). La estación pluviográfica más cercana a la zona de estudio se muestra en la Figura 10, y es la que se encuentra en el aeropuerto de Salta capital.



**Figura 10.** Localización de la estación pluviográfica de Salta capital respecto a la ubicación de la zona de estudio.

En resumen, se utilizó la información de la estación pluviográfica base de Salta capital, y se aplicó la relación IDT estimada en esa localidad en el caso de estudio.

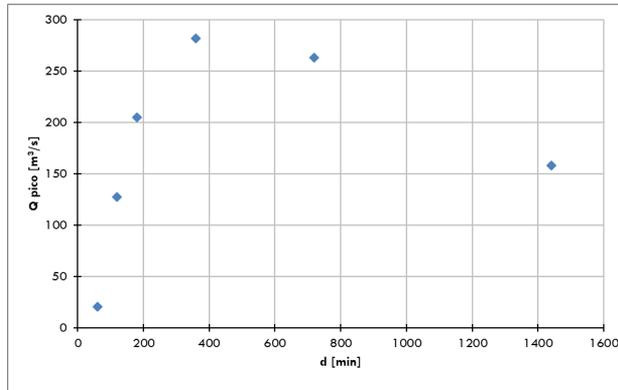


**Figura 11.** Curva IDT en la localidad de Salta capital para duraciones menores a 120 min (arriba) y mayores a 120 min (abajo).

### 3.4.2 Cálculo de la duración de la tormenta crítica sobre la cuenca

Para calcular la duración de la tormenta crítica de la cuenca analizada se modelaron, para una recurrencia de 25 años, lluvias de diferentes duraciones para encontrar cual es la duración que genera el caudal pico máximo (caso más desfavorable). Esto se hizo teniendo en cuenta aplicando el modelo del SCSCN con los valores previamente presentados. A continuación, se grafican los caudales pico obtenidos en la cuenca para cada una de las duraciones de lluvia modeladas:

## Caudales de diseño en cuencas de la provincia de Salta



**Figura 12.** Caudales pico obtenidos para diferentes duraciones de lluvias modeladas sobre la cuenca.

En la Figura 12 se observa que a partir de una duración de tormenta de 360 min (6 h) la cuenca entra en régimen, es decir que los caudales pico alcanzan su valor máximo. Para duraciones mayores se obtienen caudales menores, por lo que la tormenta de duración igual a 6 horas es la crítica sobre la cuenca de estudio. Es por ello que la duración de la lluvia de diseño a ser ingresada al modelo hidrológico para la determinación de los caudales de diseño es de 360 min (y esta generará la respuesta más desfavorable sobre la cuenca).

Partiendo de la curva IDT previamente calculada, se estimaron las lluvias de diseño asociadas a las recurrencias de 2, 5, 10, 25, 50 y 100 años. Las láminas de lluvia correspondientes a una duración de 360 min (duración crítica de la cuenca) y a los diferentes T son:

**Tabla 5.** Láminas de lluvia (en mm) caídas en 360 min para las diferentes recurrencias

T [años]	2	5	10	25	50	100
h [mm]	60	82	97	131	116	145

### 3.4.2 Atenuación espacial de la lámina de lluvia

Se tiene en cuenta debido a que el área de la cuenca es mayor a 25 km<sup>2</sup>. Se aplicó el método CODA (Catalini, 2002). Este establece que:

$$h_{areal} = CDA \cdot h. \quad (11)$$

Donde:

$h_{areal}$  : Lámina de lluvia media areal sobre la cuenca.

$h$  : Lámina de lluvia puntual cuya localización coincide con la ubicación de la IDT previamente calculada.

$CDA$ : Coeficiente de atenuación para calcular la precipitación media areal en una cuenca a partir de datos de precipitación puntuales. Depende de la duración de la tormenta ( $d$ ) y del área de la cuenca ( $A$ ) y, tal como se indica en Catalini (2002) se calcula como:

$$CDA = 25^{-k} A^k, \tag{12}$$

$$k = -2,1438 d^{-0,4774}. \tag{13}$$

Las láminas de lluvia medias areales correspondientes a una duración de 360 min (duración crítica de la cuenca) y a los diferentes  $T$  son:

**Tabla 5.** Láminas de lluvia medias areales (en mm) caídas en 360 min para las diferentes recurrencias

$T$ [años]	2	5	10	25	50	100
$h$ [mm]	48	66	78	94	105	117

### 3.4.4 Distribución temporal de la lámina de lluvia

Se aplicaron los hietogramas tipo determinados en proyectos de investigación previos a partir del análisis de la información pluviográfica de Salta capital (Guillén, 2016).

La siguiente tabla muestra los hietogramas tipo para duraciones entre 15 y 1440 min sintetizados en el aeropuerto de Salta, con el método de la mediana de la distribución empírica (técnica de Huff) y por el método del ordenamiento de intervalos (técnica de Pilgrim), expresados en sextiles. Cada bloque de las 8 series dura 1/6 de la duración.

**Tabla 6.** Hietogramas tipo estimados en Salta capital

d [min]	$\Delta t$ [min]	n	PILGRIM				HUFF			
			tp [min]	Coeficiente	Coeficiente de picn	tp [min]	Coeficiente	Coeficiente c		
15	5	1	2.5	17%	46%	1	2.5	17%	44%	
30	5	3	12.5	42%	28%	1	2.5	8%	19%	
60	10	3	25	42%	34%	3	25	42%	25%	
120	20	2	30	25%	29%	2	30	25%	28%	
240	40	2	60	25%	42%	2	60	25%	26%	
480	80	5	360	75%	48%	4	280	58%	25%	
720	120	5	540	75%	52%	5	540	75%	37%	
1440	240	6	1320	92%	72%	6	1320	92%	45%	

Teniendo en cuenta estos resultados y la duración crítica de la tormenta en la cuenca, en este trabajo se utilizó un coeficiente de avance (es decir, una relación entre la posición del pico de la tormenta y la duración total de la precipitación) de 0.33.

### 3.5 Modelo de transformación lluvia-caudal

Se utilizó el HEC-HMS (Hydrologic Engineering Center's Hydrologic Modeling System) que es un programa de simulación hidrológica tipo evento, lineal y semidistribuido, desarrollado para estimar las hidrógrafas de salida en una cuenca o varias subcuencas (caudales máximos y tiempos al pico) a partir de condiciones extremas de lluvias, aplicando para ello algunos de los métodos de cálculo de hietogramas de diseño, pérdidas por infiltración, flujo base y conversión en escorrentía directa que han alcanzado cierta popularidad en los Estados Unidos y, por extensión, en nuestro país.

HEC-HMS está diseñado para simular el proceso de precipitaciónescurrencimiento en cuencas. Está diseñado para ser aplicado en un amplio rango de regiones geográficas para solucionar un rango general de problemas. Puede utilizarse en pequeñas cuencas urbanas, o en grandes cuencas sin intervención; los resultados se pueden aplicar para estudios de disponibilidad de agua, drenaje urbano, observación de flujo, impacto de intervenciones en cuencas, reducción del daño por inundaciones, operación de sistemas, etc. La versión es amigable para el usuario porque permite visualizar los resultados de las simulaciones en forma gráfica, tabulada y expeditiva.

El programa incluye una interfaz gráfica para el usuario (GUI) que le permite introducir la información necesaria para una simulación, manejar los componentes de análisis hidrológico por medio de módulos integrados, y obtener respuestas gráficas o tabuladas de fácil comprensión e impresión. El documento de ayuda incorporado en el programa aclara la utilización de sus opciones.

Los archivos de extensión DSS (Data Storage System) se utilizan para almacenar y trabajar con series de tiempo, funciones emparejadas y datos de grilla en una forma muy transparente para el usuario.

Para definir la estructura de las cuencas, el programa considera los siguientes elementos:

1. Subcuencas (*subbasins*)
2. Tramos de tránsito (routing reach)
3. Uniones (*junctions*)
4. Embalses (*reservoirs*)
5. Fuentes (*sources*)
6. Sumideros (*sinks*)
7. Derivaciones (*diversions*)

Con estos siete componentes, el usuario puede elaborar una cuenca tan compleja como requiera el problema que está tratando y como permita la información de campo disponible. Si se cuenta con información digital de campo, el HMS incluye la opción de trabajar la cuenca con subdivisiones en grillas o celdas, cada una de las cuales almacena información pertinente respecto a la precipitación, área, pendientes y condición de humedad del suelo.

Los elementos anteriores se disponen en forma de redes dendríticas con un orden o secuencia lógica para realizar los cálculos desde las subcuencas, que conforman las cabeceras aguas arriba, hasta el punto de salida de todo el caudal, aguas abajo. El usuario debe prestar atención a este criterio, ya que los cálculos siguen rigurosamente esta secuencia (por ejemplo, si tienen en cuenta una derivación no pueden entregar las aguas derivadas en un punto aguas arriba, aunque técnicamente esto sea factible). Por tal motivo, el primer paso en la preparación de la información consiste en definir correctamente la estructura de la cuenca que se pretende simular.

El programa trabaja con tres módulos básicos que definen en su conjunto el proyecto de simulación de la cuenca:

1. **Módulo de precipitación:** permite seleccionar uno de seis patrones de precipitación (tipos de hietogramas) del evento de tormenta que más se ajuste a las posibles condiciones de la cuenca, incluyendo la introducción manual de los datos de la lluvia de diseño.

2. **Módulo de la cuenca:** permite la representación del sistema físico con los elementos antes citados, y la inclusión de las características morfométricas y de condición del suelo para cada uno de ellos.

3. **Módulo de control:** incluye las fechas de inicio y culminación de los datos de lluvia y caudal para la simulación (u optimización), y los intervalos de tiempo para realizar los cálculos.

Estos tres módulos deben definirse completamente antes de iniciar la corrida de la simulación.

Se utiliza el hidrograma unitario adimensional del SCS modificado, el cual se define por la siguiente relación:

$$q_p = PRF \times A \times Q/t_p. \quad (14)$$

Donde:

$q_p$ : Caudal pico del hidrograma unitario en ft<sup>3</sup>/s.

$A$ : Área de la cuenca en mi<sup>2</sup>.

$Q$ : Volumen escurrido en pulgadas.

$t_p$ : Tiempo al pico del hidrograma unitario en horas.

El porcentaje del volumen que escurre antes de alcanzar el caudal pico (*PRF*, por sus siglas en inglés) no es uniforme en todas las cuencas debido a que depende de la longitud del cauce principal, la cobertura del suelo y otras propiedades de la cuenca. Haciendo variar este factor, se pueden obtener diferentes hidrogramas unitarios adimensionales del SCS. Se ha encontrado que las cuencas de llanura poseen factores *PRF* más bajos (del orden de 100 a 300), mientras que cuencas con mayores pendientes poseen *PRF* más altos (del orden de 400 a más de 600).

Para poder definir el factor *PRF* de los hidrogramas unitarios adimensionales, Sheridan et al. (2002) desarrolló una relación entre dicho factor y dos características de las cuencas: el área de drenaje ( $A$ , en km<sup>2</sup>) y la pendiente del cauce principal ( $S$ , en %):

$$PRF = 490,196 \times S^{0,882} \times A^{0,264}. \quad (15)$$

## Caudales de diseño en cuencas de la provincia de Salta

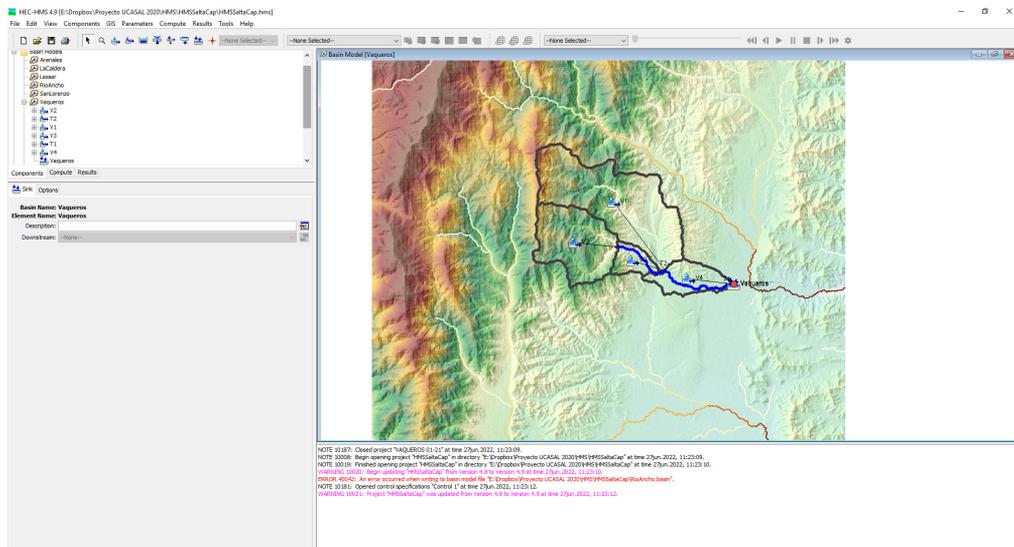
El hidrograma unitario estándar adimensional del SCS utiliza por defecto un PRF=484; en este trabajo se analizó cada una de las subcuencas y se definió el valor del PRF para cada una de ellas.

Para poder aplicar este hidrograma unitario, es necesario además calcular el tiempo de retardo ( $t_{lag}$ ) de la cuenca. Este parámetro se calcula como el 60 % del tiempo de concentración de la cuenca, es decir:

$$t_{lag} = 0,6 T. \quad (16)$$

### 3.6 Caudales de proyecto

En la Figura 13 se presenta el esquema de modelación adoptado en HEC-HMS para la cuenca:



**Figura 13.** Esquema de modelación en HEC-HMS.

A continuación, se presentan los caudales pico de cada uno de los hidrogramas obtenidos de la modelación en dicha localización.

**Tabla 7.** Caudales pico asociados a las diferentes recurrencias

$T$ [años]	$Q$ máximo [ $m^3/s$ ]
2	100
5	207
10	293
25	414
50	511
100	612

Además, se conocen los hidrogramas y los caudales de diseño asociados a las diferentes recurrencias en cada una de las subcuencas y puntos de interés dentro del área de estudio.

### 3.7 Validación de los resultados obtenidos

Para poder complementar el estudio hidrológico aquí presentado, se validaron los caudales de diseño estimados con los obtenidos en un estudio anterior para la misma localización.

En el Río Vaqueros se contaba con un estudio realizado en el año 2010 por el ingeniero Néstor Ilvento, denominado Proyecto Parque Urbano Bicentenario. En él se arribaba a los siguientes caudales de diseño:

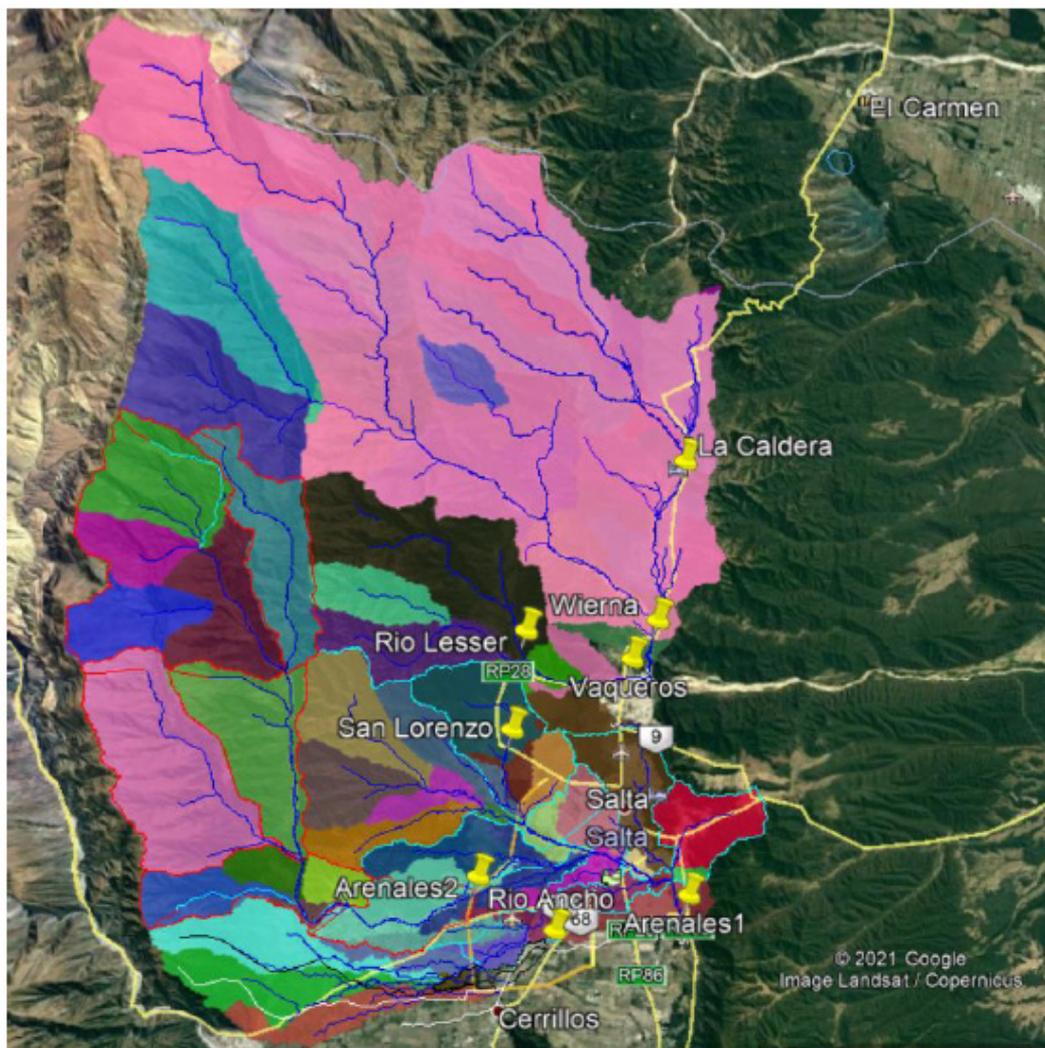
- $Q=308 m^3/s$  para una recurrencia de 25 años
- $Q=477 m^3/s$  para una recurrencia de 50 años

Con el modelo hidrológico aquí desarrollado se obtuvieron los caudales de diseño 414 y 511  $m^3/s$  para recurrencias de 25 y 50 años respectivamente, valores del mismo orden de magnitud que los obtenidos en el antecedente.

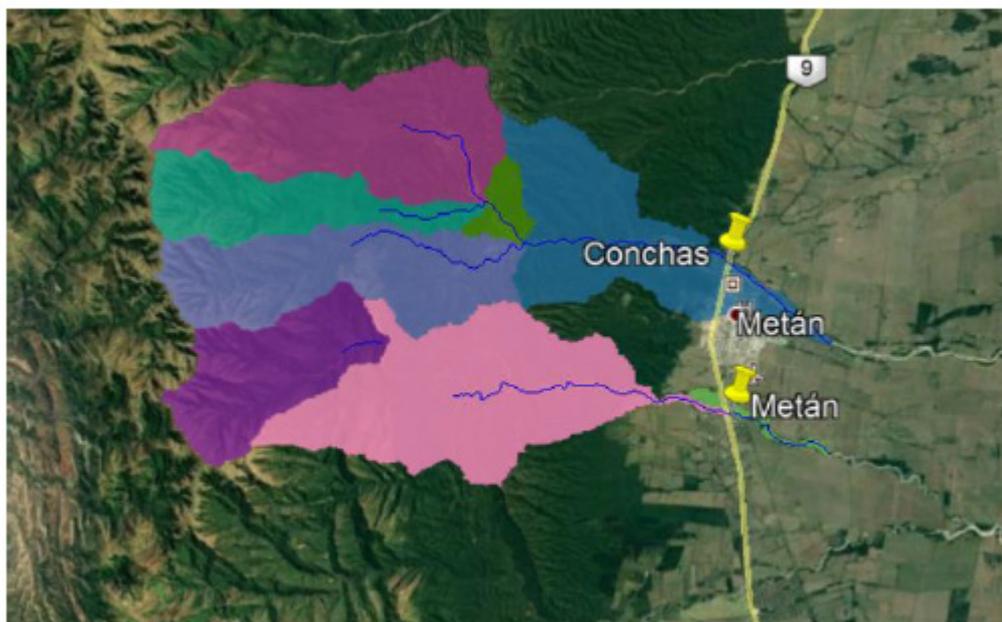
Con ello se validan los caudales de diseño y se refuerzan los resultados alcanzados en este trabajo.

## 4. Resultados

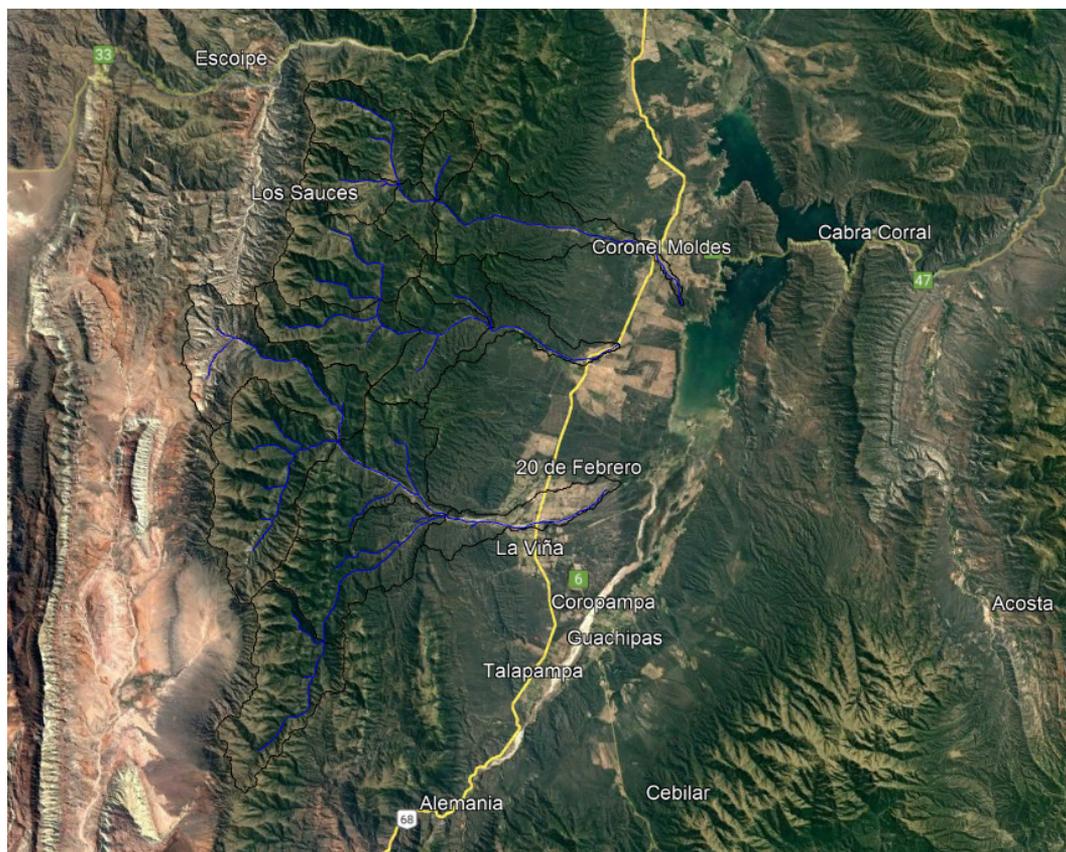
Siguiendo la misma metodología que la previamente explicada, se realizaron estudios hidrológicos de manera análoga en otros sitios de interés (Figuras 15, 16, 17 y 18).



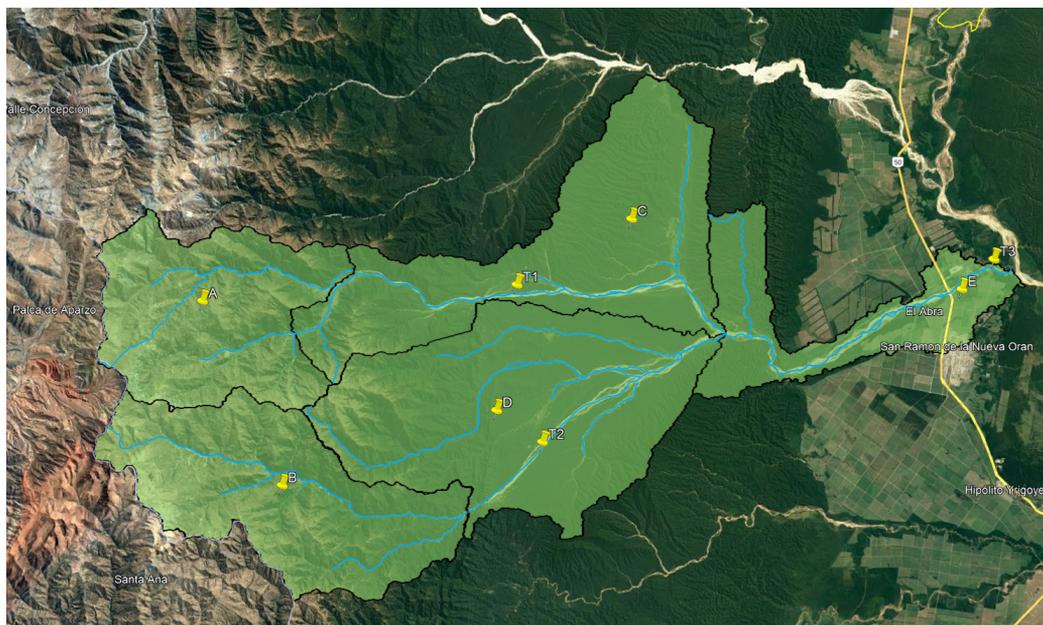
**Figura 14.** Cuencas cercanas a la ciudad de Salta.



**Figura 15.** Cuencas cercanas a la ciudad de Metán.



**Figura 16.** Cuencas cercanas al embalse Cabra Corral.



**Figura 17.** Cuencas cercanas a la ciudad de Orán.

Las principales características de las cuencas analizadas se resumen en la Tabla 8.

**Tabla 8.** Principales características de las cuencas analizadas

Cuenca	$A$ [km <sup>2</sup> ]	$L$ [m]	$\Delta H$ [m]	$S$ [m/m]	CN medio	$TC$ [min]	$d$ [min]
Arenales arriba	326	47 534	2336	5 %	71	269	360
Arenales abajo	643	61 786	2420	4 %	71	352	360
Río Ancho	90	25 102	1106	4 %	71	173	360
La Caldera	169	22 052	761	3 %	69	200	360
Wierna	632	55 979	3693	7 %	70	273	720
Lesser	71	18 787	1949	10 %	69	102	180
Vaqueros	134	27 514	1821	7 %	72	165	360
San Lorenzo	22	8354	815	10 %	70	67	120
Metán	74	27 623	1866	7 %	72	154	360
Conchas	132	26 610	1877	7 %	68	150	360
Chuñapampa	143	35 241	1770	5 %	69	214	360
Ampascachi	155	31 072	1649	5 %	69	192	360
La Viña	329	41 350	1985	5 %	69	243	360
Río Blanco	1709	109 368	4800	4 %	66	507	720

Donde:

$A$ : área de la cuenca

$L$ : longitud del cauce principal

$\Delta H$ : diferencia de altura del cauce principal

$S$ : pendiente del cauce principal

$CN$  medio:  $CN$  promedio de la cuenca analizada

$TC$ : tiempo de concentración de la cuenca

$d$ : duración crítica de la tormenta de diseño ingresada al modelo

Las láminas de precipitaciones medias areales simuladas se muestran en la Tabla 9.

**Tabla 9.** Láminas de lluvia medias areales para cada una de las recurrencias

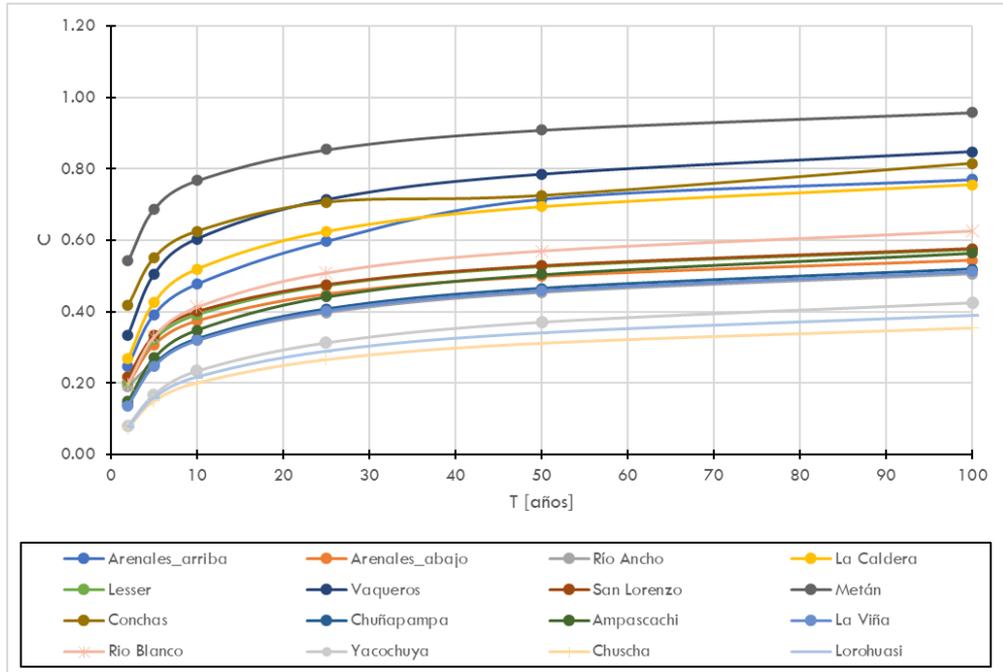
Cuenca	$h$ [mm] para diferentes $T$ [años]					
	2	5	10	25	50	100
Arenales arriba	43	59	70	80	84	94
Arenales abajo	39	54	64	77	86	95
Río Ancho	51	70	82	99	111	123
La Caldera	47	64	76	91	102	113
Wierna	49	68	80	96	108	119
Lesser	43	59	69	83	93	103
Vaqueros	48	66	78	94	105	117
San Lorenzo	48	65	77	93	104	115
Metán	64	79	89	101	110	118
Conchas	59	74	83	94	102	109
Chuñapampa	36	49	58	70	78	87
Ampascachi	36	49	58	70	78	87
La Viña	36	49	58	70	78	87
Río Blanco	45	62	73	87	98	109

La Tabla 10 resume los caudales pico asociados a cada uno de los tiempos de retorno estimados.

**Tabla 10.** Caudales pico asociados a las diferentes recurrencias

Cuenca	Q pico [m <sup>3</sup> /s] para diferentes T [años]					
	2	5	10	25	50	100
Arenales arriba	161	348	503	723	901	1089
Arenales abajo	231	495	712	1022	1274	1541
Río Ancho	40	75	110	164	210	260
La Caldera	98	215	309	445	555	670
Wierna	290	609	865	1226	1516	1820
Lesser	57	124	179	258	322	389
Vaqueros	100	207	293	414	511	612
San Lorenzo	31	66	93	133	165	200
Metán	119	188	235	297	343	388
Conchas	151	248	317	406	452	543
Chuñapampa	33	81	124	187	240	297
Ampascachi	38	95	145	220	282	350
La Viña	74	185	282	426	546	676
Río Blanco	352	808	1192	1749	2207	2695

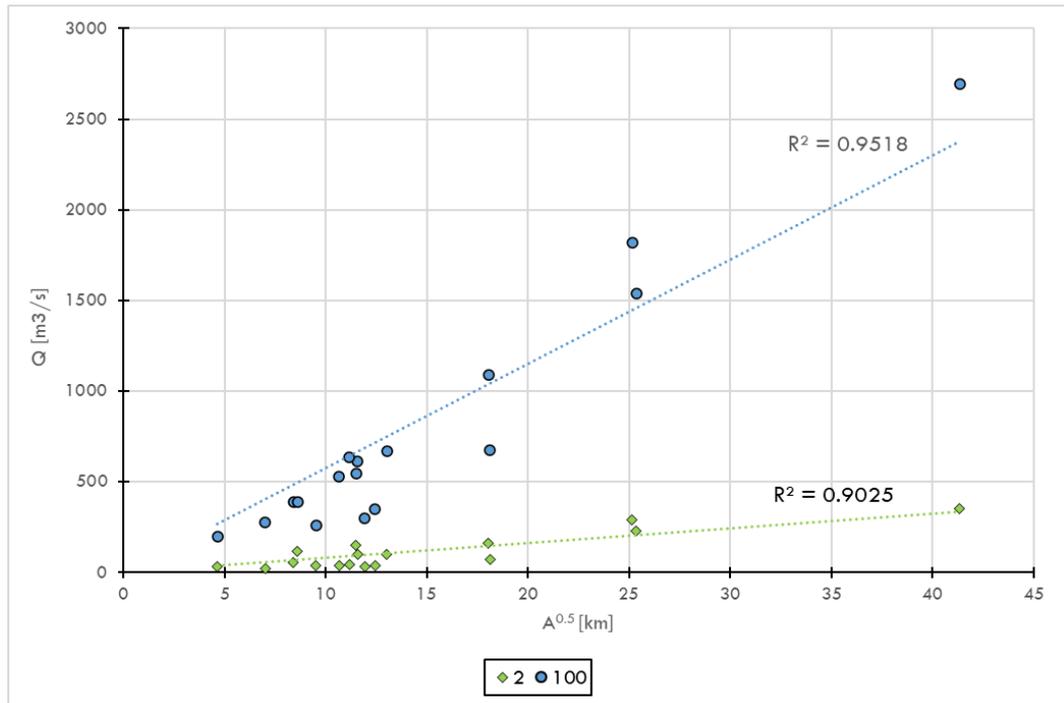
Para analizar detalladamente los resultados obtenidos, lo primero que se realiza es la estimación de un parámetro hidrológico muy útil en la hidrología, el cual es el coeficiente de escurrimiento (es decir, la relación entre la lámina escurrida y la lámina precipitada o, lo que es lo mismo, la relación entre el volumen escurrido y el precipitado sobre la cuenca). La Figura 20 muestra los resultados alcanzados, en donde se observa muy claramente cómo dichos valores (tal como era de esperarse) aumentan a medida que crece el periodo de retorno. Por otro lado, en cuencas homogéneas se obtienen valores del mismo orden de magnitud, y este parámetro a futuro puede ser de suma utilidad para una estimación rápida y preliminar de escurrimientos que pudieran generarse en una cuenca cercana a las estudiadas.



**Figura 18.** Coeficientes de escurrimiento de cada una de las cuencas, asociados a cada una de las recurrencias.

En la última figura se observa que las cuencas cercanas a la localidad de Cafayate presentan los valores más bajos, y esto se debe al suelo arenoso y a las menores precipitaciones que se registran en esa zona (véase Figura 9). A su vez, las cuencas del Valle de Lerma (y cercanas a Salta capital) presentan los valores intermedios de coeficientes de escurrimientos; por su parte, en las cuencas de la zona de Metán se estimaron los mayores valores (y esto se debe principalmente al mayor régimen de precipitación en la zona, donde el uso de suelo es en su mayoría para cultivos).

Asimismo, otro parámetro muy útil para analizar es la relación entre el caudal de diseño asociado a un tiempo de retorno dado y la raíz del área de la cuenca. Según las investigaciones realizadas por Asquith y Thompson (2008), en cuencas pobremente aforadas, los caudales de proyecto pueden ser estimados por transposición si se cuenta una cuenca homogénea cercana con caudales de diseño calculados. Este método dice que la relación entre los caudales y la raíz del área de la cuenca es constante en cuencas homogéneas. En este sentido, a continuación se comparan los caudales asociados a 2 y a 100 años de tiempo de retorno con la raíz del área de las cuencas de estudio (Figura 19).



**Figura 19.** Relación entre los caudales asociados a 2 y 100 años de recurrencia y la raíz del área de las cuencas de estudio.

Al analizar los datos de la última figura, se observa que presentan un muy buen ajuste. A futuro, esta base de datos puede ser de sumo interés para contrastar y validar caudales de proyecto en cuencas aledañas y homogéneas.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se estimaron los caudales de diseño asociados a diferentes recurrencias en diferentes cuencas y sitios de interés de la provincia de Salta, lo cual resulta fundamental para lograr un mejor diseño de infraestructura hídrica en toda la zona de estudio.

La estimación de caudales de proyecto para cuencas de interés de la provincia de Salta constituye una innovación sin precedentes para este territorio, y puede ser utilizada para diseño hidrológico y evaluación de severidad de eventos extremos de precipitación.

La disponibilidad de datos de caudales extremos de calidad y actualizados es fundamental para el manejo hidrológico, especialmente en áreas donde se asientan poblaciones de alta vulnerabili-

dad; ya que permite desarrollar las acciones necesarias para mitigar el impacto de las amenazas hidrológicas por medio de una estimación confiable.

La metodología de diseño hidrológico aplicada está homogeneizada en toda la Argentina, de modo que tanto la determinación de la lluvia de diseño como la modelación hidrológica para la determinación de los hidrogramas de diseño se realizan siguiendo un método validado y estandarizado por especialistas de nuestro país.

Se recomienda seguir trabajando en estudios futuros con el fin de incorporar nueva información de provincias vecinas que permita una mejor caracterización bajo las condiciones de los límites. Los caudales de proyecto estimados deben validarse y actualizarse periódicamente (se recomienda con un período de cinco años o cada vez que ocurra una crecida significativa en las cuencas de estudio).

Con el trabajo realizado, se deja una completa base de datos de caudales de diseño para diversos organismos de la provincia, lo cual puede resultar en información de sumo interés para revisores de los proyectos hídricos que se realicen. Esta base de datos es muy importante, ya que permitirá no solo verificar las obras existentes, sino también contar con información precisa para contrastar o dimensionar cualquier medida estructural o no estructural para mitigar el riesgo ante una amenaza hídrica. Si no se cuenta con caudales de diseño (y por ende, hidrogramas) adecuadamente estimados, las futuras obras o medidas proyectadas seguramente estarán mal diseñadas, ocasionando problemas futuros de gran magnitud.

Por último, la información que se ha presentado no pretende ser un reemplazo de las técnicas clásicas de análisis y del procesamiento hidrológico, sino un valor de referencia a nivel regional.

## Referencias

- Asquith y Thompson (2008). Alternative regression equations for estimatrion of anual peak streamflow frequency for undeveloped watersheds in Texas using PRESS Minimization. USGS.
- Baraquet, M. M. (2018). Efectos de la variabilidad climática en la predicción de lluvias para diseño en la provincia de Córdoba. [Tesis de Maestría] FCEFYN, UNC.
- Caamaño, G.; Dasso, C. (2003). Lluvias de diseño. Conceptos, técnicas y experiencias. UNIVERSITAS, Editorial Científica Universitaria.
- Catalini, C. G.; Caamaño N.; García C. M. (2002). Efectos fisiográficos y climáticos sobre las curvas de reducción areal de lluvias de diseño. [Trabajo en CDROM]. XIX Congreso Nacional del Agua, CPCNA. Villa Carlos Paz, Argentina.
- Catalini, C. G.; Guillén, N. F.; García, C. M.; Bazzano, F. y Baraquet, M. M. (2021). Web mapping of extreme daily rainfall data in central and northern Argentina. *Journal of Hydrologic Engineering*, 26(7), 05021013.
- Cleveland, T. G.; García, A.; He, X.; Fang, X.; and Thompson, D. B. (2012). Comparison of physical characteristics for selected small watersheds in Texas as determined by automated and manual methods. Proc., Texas ASCE Section Fall Meeting, El Paso, Tex.

- Guillén, Nicolás Federico (2019). Optimización del diseño hidrológico e hidráulico utilizando LS-PIV. [Tesis doctoral]. FCEFYN, UNC.
- Guillén, N. F.; García, C. M.; Catalini, C. G. y Botelli, M. C. (2018, octubre). Estimación de láminas de lluvias máximas diarias y sus parámetros estadísticos en Argentina. VI Taller sobre Eventos Hidrometeorológicos Extremos, Mendoza, Argentina.
- Guillén, N. F.; Botelli, M. C.; García, C. M. y Flores, K. (2016). Estimación de la relación IDT en Salta capital. 5.º Taller sobre Diseño Hidrológico, Salta.
- Ilvento, Botelli y Guillén (2010). Proyecto Parque Urbano Bicentenario. Secretaría de Financiamiento Internacional. Provincia de Salta.
- Roussel M.C., Thompson D.B., Fang X., Cleveland T.G., Garcia C.A. (2005). TimeParameter Estimation For Applicable Texas Watersheds. Research Report 0-4696-2. Lamar University.
- Sheridan, Joseph M. et al. (2002). Peak Rate Factors for Flatland Watersheds. Applied Engineering in Agriculture (18)65-72.
- U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center (2000). HEC-HMS Hydrologic Modeling System, Technical Reference Manual, CPD-74B. Hydrologic Engineering Center.
- World Commission on Environment and Development (1987). Our Common Future, From One Earth to One World.
- World Meteorological Organization (1972). Hydrological Sciences Bulletin, 17(2),140143.

### **Myriam Cecilia Botelli**

**Perfil académico y profesional:** Especialista Ingeniera Hidráulica, egresada de la Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa). Especialista en Formulación y Evaluación de Proyectos de Inversión. Encargada del Gabinete de Hidráulica e Instalaciones Sanitarias de la UCASAL. Docente de las cátedras de Hidrología, y de Hidráulica Aplicada en la carrera de Ingeniería Civil de la UCASAL. Investiga sobre temas relacionados al riesgo hídrico.

Correo electrónico: cbotelli@ucasal.edu.ar

### **Nicolás Guillén**

**Perfil académico y profesional:** Doctor en Ciencias de la Ingeniería. Magíster en Ciencias de la Ingeniería (mención en Recursos Hídricos). Ingeniero Civil, egresado de la Universidad Nacional de Córdoba. Investiga temas de hidrología e hidráulica. Profesor visitante en el Water Science Center del estado de Illinois (United States Geological Survey, Office of Surface Water, Estados Unidos). Asesor del secretario de Recursos Hídricos y coordinador técnico del Plan Integral de Manejo de Embalses en el Ministerio de Servicios Públicos de la Provincia de Córdoba.

Correo electrónico: nfguillen@hotmail.com

### **Matías Eder**

**Perfil académico y profesional:** Doctor en Ciencias de la Ingeniería. Magíster en Ciencias de la Ingeniería (mención en Recursos Hídricos). Ingeniero civil, egresado de la Universidad Nacional de Córdoba. Su campo de investigación se centra en la hidrología, la hidráulica y la hidráulica fluvial. Profesor adjunto con dedicación simple en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba y profesor de carreras de posgrado en la misma universidad.

Correo electrónico: matiaseder2@gmail.com

## The quartile functions for the Generalized Gutenberg-Richter distribution

### Las funciones del cuartil para la Distribución de la Función de Gutenberg-Richter generalizada

Mika Haarala<sup>1</sup>, Petrus Vermeulen<sup>2</sup>

---

*Ingeniería Sísmica/ artículo científico*

Citar: Haarala, M., and Vermeulen, P. (2022). The quartile functions for the Generalized Gutenberg-Richter distribution. *Cuadernos de Ingeniería* (14).

Recibido: noviembre/2021

Aceptado: setiembre/2022

#### Abstract

This study provides quartile and quartile density functions for the Generalized Gutenberg-Richter function. The quartile function provides a way to write a random number generator for the Gutenberg-Richter distributed data. Moreover, we also show the general limitations of the Gutenberg-Richter parameters  $\beta$ ,  $m_{\max}$  and  $m_{\min}$  in this contribution.

**Keywords:** Gutenberg-Richter distribution, quartile function, quartile density function.

#### Resumen

En este trabajo se proponen funciones de cuartiles y funciones de densidad de cuartiles para la función de Gutenberg-Richter generalizada. La función cuartil permite escribir un generador de números aleatorios para los datos distribuidos de Gutenberg-Richter. Además, en esta contribución, demostramos las limitaciones generales de los parámetros  $\beta$ ,  $m_{\max}$  y  $m_{\min}$  en este trabajo.

**Palabras clave:** Distribución de Gutenberg-Richter, función cuartil, función de densidad de cuartil

---

<sup>1</sup> Consultant, Salta, Argentina

<sup>2</sup> Consultant, Pretoria, South Africa

## 1. Introduction

The probability density function (PDF) of the General Gutenberg–Richter (GGR) distribution function, also known as a double truncated exponential distribution, is given by

$$f(m) = \begin{cases} \frac{\beta \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}, & \text{for } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \text{ and } \beta \neq 0, \\ \frac{1}{m_{\max} - m_{\min}}, & \text{for } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \text{ and } \beta = 0, \\ 0, & \text{for } m \notin [m_{\min}, m_{\max}] \end{cases} \quad (1)$$

with cumulative distribution function (CDF)

$$F(m) = \begin{cases} 0, & \text{for } m < m_{\min}, \\ \frac{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}, & \text{for } m_{\min} \leq m < m_{\max} \wedge \beta \neq 0, \\ \frac{m - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}}, & \text{for } m_{\min} \leq m < m_{\max} \wedge \beta = 0, \\ 1, & \text{for } m \geq m_{\max}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $-\infty \leq \beta \leq \infty$  and  $-\infty \leq m_{\min} \leq m_{\max} \leq \infty$  (Haarala, 2021). The distribution of the maximum of the GGR is

$$F_{M_\eta}(m) = \begin{cases} 0, & \text{for } m < m_{\min}, \\ [F_M(m)]^\eta, & \text{for } m_{\min} \leq m < m_{\max}, \\ 1, & \text{for } m_{\max} \leq m, \end{cases} \quad (3)$$

where  $\eta \in \mathbb{R}_+$ .

An important difference between the classical definition and the GGR is for the particular case  $\beta = 0$ . The classical definition assumes that  $\beta > 0$ , but because the estimators can be calculated at any  $\eta \in \mathbb{R}_+$  it is necessarily to consider the distribution at the case  $\beta \leq 0$  (Haarala, 2021). It should be noted that the classical form of the distribution (1) holds also for  $\beta < 0$ , but it has a discontinuity at  $\beta = 0$ . That is why the classical definition needs the Uniform distribution at  $\beta = 0$ .

## 2. Quartile and quartile density functions

### *The case when $\beta$ is non-zero*

Because the CDF shown in equation (2) is invertible, the quartile function can be obtained for the case in which  $\beta \neq 0$  as shown in the following expression

$$Q(p) = m_{\min} - \frac{1}{\beta} \log\left(1 - \left(1 - \exp\left[-\beta(m_{\max} - m_{\min})\right]\right)p\right),$$

where  $p \in [0, 1]$ . A quartile density function ( $q = Q'$ ) can yield the following expression

$$q(p) = \frac{1}{\beta} \frac{1 - \exp\left[-\beta(m_{\max} - m_{\min})\right]}{1 - \left(1 - \exp\left[-\beta(m_{\max} - m_{\min})\right]\right)p}.$$

Earlier work (Haarala, 2021) has shown that if  $\beta(m_{\max} - m_{\min}) \rightarrow \infty$ , it is possible to find the following equation

$$\eta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \exp\left[-\beta(m_{\max} - m_{\min})\right]\right)^k}{k(k + \eta)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{k(k + \eta)} = H_{\eta}. \quad (4)$$

where  $H_{\eta}$  is a General Harmonic number (Abramowitz and Stegun, 1972; Haarala and Orosco, 2016). If  $0 < \beta < \infty$  and  $m_{\max} - m_{\min} \rightarrow \infty$ , then

$$E(M_{(\eta)}) = m_{\min} + \frac{H_{\eta}}{\beta} \Leftrightarrow m_{\min} = E(M_{(\eta)}) - \frac{H_{\eta}}{\beta}.$$

If the expected value is bounded, as they are in practical cases, the minimum  $m_{\min}$  is bounded as well.

If the  $\beta$  is unbounded, the limit of series (4) is still  $H_{\eta}$  when  $\beta(m_{\max} - m_{\min}) \rightarrow \infty$ . For this case, the difference  $m_{\max} - m_{\min}$  can be bounded or unbounded. Because the General Harmonic number is bounded  $0 < H_{\eta} < \infty$  when  $0 < \eta < \infty$  (of course,  $H_{\eta} \rightarrow \infty$  as  $\eta \rightarrow \infty$ ), the expected value is then equal to

$$E(M_{\eta}) = m_{\min}$$

for all  $0 < \eta < \infty$ . Again, because the expected value is assumed to be bounded, the minimum must be bounded. Thus, the limits can be written as  $-\infty < m_{\min} \leq m_{\max} \leq \infty$ , when  $\beta > 0$ . Moreover, if  $E(M_{(\eta_1)}) \neq E(M_{(\eta_2)})$ , then  $0 < \beta < \infty$ .

It can be shown that for the negative values of  $\beta$ , that

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\eta} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ \left( \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})] - 1 \right)^{-k+\eta} - 1 \right]}{k-\eta}}{\left( \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})] - 1 \right)^\eta} = -\frac{1}{\eta}, \quad (5)$$

when  $\beta(m_{\max} - m_{\min}) \rightarrow -\infty$  (Haarala, 2021). Now, if  $-\infty < \beta < 0$  and  $m_{\max} - m_{\min} \rightarrow \infty$ , then

$$E(M_{(\eta)}) = m_{\max} + \frac{1}{\beta\eta} \Leftrightarrow m_{\max} = E(M_{(\eta)}) - \frac{1}{\beta\eta}. \quad (6)$$

It follows that the expected value  $E(M_{(\eta)})$  is bounded if and only if  $m_{\max}$  is also bounded. Moreover, because  $\eta^{-1}$  is bounded for all  $\eta > 0$ , then

$$E(M_{(\eta)}) = m_{\max}$$

when  $\beta \rightarrow -\infty$ . In this case, the maximum  $m_{\max}$  is bounded because the estimators of expected values are assumed to be bounded. Thus, the limits are  $-\infty \leq m_{\min} \leq m_{\max} < \infty$ , when  $\beta < 0$ . And if  $E(M_{(\eta_1)}) \neq E(M_{(\eta_2)})$ , then  $-\infty < \beta < 0$ .

### **The case where $\beta$ is zero**

When  $\beta = 0$ , then the quartile function of equation (2) is

$$Q(p) = m_{\min} + (m_{\max} - m_{\min})p,$$

where  $p \in [0, 1]$ . The quartile density function yields the following expression

$$q(p) = m_{\max} - m_{\min}.$$

Previous results have shown that for the case of a Uniform distribution (Haarala, 2021), the bounds are

$$\begin{aligned} m_{\max} &= \frac{\eta_1 + 1}{\eta_1 - \eta_2} E(M_{(\eta_1)}) - \frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 - \eta_2} E(M_{(\eta_2)}), \\ m_{\min} &= -\eta_2 \frac{\eta_1 + 1}{\eta_1 - \eta_2} E(M_{(\eta_1)}) + \eta_1 \frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 - \eta_2} E(M_{(\eta_2)}). \end{aligned} \quad (7)$$

According to relation (6), if the estimators for the expected values are bounded, then  $E(M_{(\eta_1)})$  and  $E(M_{(\eta_2)})$  are also bounded. This indicates that the maximum  $m_{\max}$  and minimum  $m_{\min}$  are bounded. Anyway, if the maximum or the minimum is unbounded, also one of the expected values and its estimator must be unbounded. In the case of  $\beta = 0$ , the limits can be set as  $-\infty < m_{\min} \leq m_{\max} < \infty$ . Moreover, if  $E(M_{(\eta_1)}) = E(M_{(\eta_2)})$ , then

$$m_{\min} = m_{\max} = E(M_{(\eta_1)}).$$

Let's assume that all generalized estimators are bounded for  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ , where  $N$  is a size of catalog. Let's suppose that using these estimators there are only positive estimates for the  $\beta_n$ . We cannot draw any conclusion about the boundedness (or unboundedness) of the upper limit  $m_{\max}$  from the fact that  $\beta_n$  is strictly positive for all  $n$ . However, it does indicate that the lower limit  $m_{\min}$  is bounded.

In a similar way a strictly negative  $\beta_n$  does not necessarily indicate the boundedness of the lower limit  $m_{\min}$ , but it does indicate a bounded upper limit  $m_{\max}$ .

### The quartile functions

Considering the results in the previous sections, the quartile function can be defined as

$$Q(p) = \begin{cases} m_{\min} - \frac{1}{\beta} \log(1 - (1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})])p), & \begin{cases} \text{for } \beta > 0, & -\infty < m_{\min} \leq m_{\max} \leq \infty, \\ \text{for } \beta < 0, & -\infty \leq m_{\min} \leq m_{\max} < \infty, \end{cases} \\ m_{\min} + (m_{\max} - m_{\min})p, & \text{for } \beta = 0, & -\infty < m_{\min} \leq m_{\max} < \infty, \end{cases} \quad (8)$$

which has a quartile density function

$$q(p) = \begin{cases} \frac{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]}{\beta(1 - (1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})])p)}, & \begin{cases} \text{for } \beta > 0, & -\infty < m_{\min} \leq m_{\max} \leq \infty, \\ \text{for } \beta < 0, & -\infty \leq m_{\min} \leq m_{\max} < \infty, \end{cases} \\ m_{\max} - m_{\min}, & \text{for } \beta = 0, & -\infty < m_{\min} \leq m_{\max} < \infty. \end{cases}$$

It is not difficult to find the quartile function also for the maximum distribution shown in equation (4). One can replace  $p$  with  $p^{1/\eta}$  in the quartile function. For the quartile density function this means that  $q(p)$  is replaced by  $q(p)/\eta$  and  $q(p)p^{1/\eta-1}/\eta$  for cases when  $\beta \neq 0$  and  $\beta = 0$ , respectively.

In the in the appendix is given an example code to obtain GGR distributed random numbers.

### 3. Delta distribution

When  $m_{\max} - m_{\min} \rightarrow 0$  the distribution tends to a Dirac Delta distribution. Taking as definition of the Delta distribution the following two equalities:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{if } x = 0, \\ 0, & \text{if } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

The cumulative distribution of the Dirac Delta distribution is the Heaviside step function (or unit step function), which is defined as

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0, \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

For our purposes, we need to shift the Delta distribution to the value  $c = m_{\min} = m_{\max}$ , which is done as  $\delta(x - c)$ , and the corresponding Heaviside step function is  $H(x - c)$ .

The interpretation of having a Delta distribution is that “random” samples taken from the distribution have their outcomes totally certain - that is, they are deterministic and not random at all.

For the case of the CDF of the GGR, the following inequalities hold

$$0 \leq \frac{1 - \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} < 1, \quad \text{for all } m \in [m_{\min}, m_{\max}] \wedge \beta \neq 0,$$

$$0 \leq \frac{m - m_{\min}}{m_{\max} - m_{\min}} < 1, \quad \text{for all } m \in [m_{\min}, m_{\max}] \wedge \beta = 0.$$

When  $m_{\max} - m_{\min} \rightarrow 0$ , the limit of the CDF (2) yields

$$F_M(m) = H(x - c).$$

Because,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(m) dm = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} f(m) dm = 1$$

for each  $m_{\min} < m_{\max}$ , so

$$\lim_{m_{\min} \rightarrow m_{\max}} \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} f(m) dm \rightarrow 1 \quad \left[ = \int_c^c f(m) dm \right]$$

At the same time, it holds for the PDF (1)

$$f(m) = \begin{cases} \frac{\beta \exp[-\beta(m - m_{\min})]}{1 - \exp[-\beta(m_{\max} - m_{\min})]} \rightarrow \infty, & \text{for } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \text{ and } \beta \neq 0, \\ \frac{1}{m_{\max} - m_{\min}} \rightarrow \infty, & \text{for } m_{\min} \leq m \leq m_{\max} \text{ and } \beta = 0, \\ 0, & \text{for } m \notin [m_{\min}, m_{\max}] \end{cases}$$

as  $m_{\max} - m_{\min} \rightarrow 0+$ . Hence,

$$f(m) = \delta(x - c).$$

The expected value for the maximum for the case is

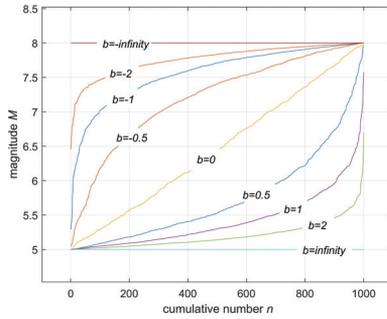
$$E(M_{\eta}) = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} m dF_{M_{\eta}}(m) = m_{\max} - \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} F_{M_{\eta}}(m) dm \rightarrow m_{\max} \quad [= m_{\min}]$$

for all  $\eta > 0$ . If  $E(M_{(\eta_1)}) \neq E(M_{(\eta_2)})$ , then it must be  $m_{\min} < m_{\max}$ .

#### 4. Examples

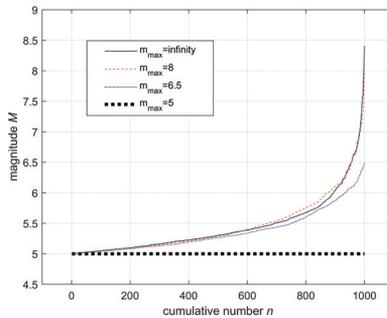
Let  $m_1, m_2, \dots, m_n$  be magnitudes in random order. Then the ordered sequence is  $m_{(1)} \leq m_{(2)} \leq \dots \leq m_{(n)}$ . The index in parentheses indicates that the events are ordered. For example, the minimum value is  $m_{(1)} = \min(m_1, m_2, \dots, m_n)$  and the maximum value from all events is  $m_{(n)} = \max(m_1, m_2, \dots, m_n)$ .

Figure 1 presents the ordered sets of randomly generated magnitudes with different  $b$ -values (note:  $\beta = b \log(10)$ ). We can see how the curves of positive  $b$  values are similar to the negative ones if they are rotated 180 degrees around the center point.

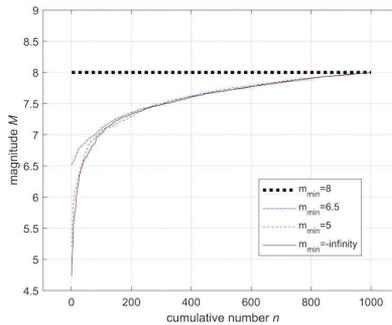


**Figure 1.** Cumulative plot of random samples of 1000 events from the GGR for different  $b$ -values

Figure 2 plots out the idea, how the ordered random events behave when they have same positive  $b$  values with a fixed minimum  $m_{\min}$ , but the maximum  $m_{\max}$  varies. Figure 3 shows the same idea, but for the fixed negative  $b$ , for fixed maximum  $m_{\max}$  and using different minimum  $m_{\min}$  values.



**Figure 2.** Cumulative plot with varying values of  $m_{\max}$  and  $b$ -value fixed at  $b=1$ , and  $m_{\min} = 5$ .



**Figure 3.** Cumulative plot with varying values of  $m_{\min}$  and  $b$ -value fixed at  $b=-1$ , and  $m_{\max} = 8$ .

## 5. Conclusions

This contribution gives the solution for the quartile functions and generate the Gutenberg-Richter distributed data. It shows also, as the estimators of real earthquake data gives at least two unequal estimates and the data is related with positive  $\beta$ , it holds  $0 < \beta < \infty$  and  $-\infty < m_{\min} < m_{\max} \leq \infty$ . A corner magnitude  $m_c$  is not necessarily a minimum. We can say only  $-\infty < m_{\min} \leq m_c < m_{\max} \leq \infty$ . Moreover, it was shown that the general estimator for the  $\beta$  can change the sign only if the upper and lower limits  $m_{\max}$  and  $m_{\min}$  are bounded.

## References

- Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions*, Dover Publ.
- Haarala, M., and Orosco, L. (2016). Analysis of Gutenberg-Richter  $b$ -value and  $m_{\max}$ . Part I: Exact solution of Kijko-Sellevoll estimator  $m_{\max}$ , *Cuadernos de Ingeniería. Nueva Serie*, (9), 51-78. <http://revistas.ucasal.edu.ar/index.php/CI/article/view/145>
- Haarala, M. (2021). Analysis of Gutenberg-Richter  $b$ -value and  $m_{\max}$ . Part III: Non-positive Gutenberg-Richter  $b$ -value, *Cuadernos de Ingeniería. Nueva Serie* (13), 45-84. <https://doi.org/10.53794/ci.v13iXIII.348>

## Appendix

We give an example code for MATLAB to generate the GGR distributed random numbers using the quartile function (8). Because of numerical stability, the uniform distribution is used when  $|\beta| < 10^{-8}$  instead of  $\beta = 0$ . This limit is given empirically.

```
function C = GRdistribution(beta,mmax,mmin,m,n)
%
% Input:
% beta = beta-value, scalar.
% mmax = maximum value, scalar.
% mmin = minimum value, scalar.
% m,n = size of output.
%
% Authors: Mika Haarala Orosco, Petrus Vermeulen

% Check the arguments
if ~isscalar(beta) || ~isscalar(mmax) || ~isscalar(mmin) || ...
    ~isscalar(m) || ~isscalar(n)
    error('All input arguments must be scalars.')
end

% Generate the random data.
p = rand(m,n);
if abs(beta) < 10^-8
    if isinf(mmax) || isinf(mmin)
        error('Limits mmax and mmin must be bounded for b=0.')
    end
    C = mmin + (mmax-mmin)*p;
else
    if beta > 0 && isinf(mmin)
        error('Lower limit mmin must be bounded for b>0.')
    elseif beta < 0 && isinf(mmax)
        error('Upper limit mmax must be bounded for b<0.')
    end
    C = mmin - log(1 - (1-exp(-beta*(mmax-mmin)))*p) / beta;
end
```

**Mika Haarala Orosco**

Academic-professional profile: MSc. in Mathematics, University of Joensuu (Finland). Researcher in Statistics, Applied Mathematics. Member of Seismic Risk Group of Interdisciplinary Studies in Engineering Institute (I.Es.I.Ing).

E-mail: mika.haaralaorosco@gmail.com

**Petrus Vermeulen**

Consultant, Pretoria, South Africa.

Academic-professional profile: PhD. in Engineering Geology, University of Pretoria, South Africa. Researcher in Probabilistic Seismic Hazard Analysis. Affiliated with the Natural Hazard Center, University of Pretoria.

E-mail: ruan.vermeulen9@gmail.com

## UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA

### AUTORIDADES

Rector	Ing. Rodolfo Gallo Cornejo
Vicerrectora Académica	Mg. Prof. Lilian Constanza Diedrich
Vicerrector de Investigación y Desarrollo	Mg. Lic Daniel Sánchez Fernández
Vicerrector Administrativo	Dr. Darío Eugenio Arias
Vicerrector de Formación	Pbro. Dr. Cristian Arnaldo Gallardo
Vicerrector de Tecnología y Educación Digital	Ing. Lic. Daniel Torres Jiménez
Vicerrector de Extensión e Integración Universitaria	Ing. Alejandro Patrón Costas
Secretaria General	Mg. Lic. Silvia Milagro Álvarez

### CONSEJO DE INVESTIGACIONES

Director	Mg. Lic. Daniel Sánchez Fernández
----------	-----------------------------------

### AUTORIDADES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

Decano de la Facultad de Ingeniería	Mg. Ing. Néstor Eugenio Lesser
Secretario Académico	Mg. Ing. Guillermina Nievas
Secretaria Técnica	Sec. Tec. Andrea Burgos
Jefa del Departamento de Investigación	Dra. Ing. Lía Elizabeth Orosco Segura
Jefe del Departamento de Extensión, Graduados y Bienestar	Ing. Juan Francisco Linares
Jefe del Departamento de Ingeniería Industrial	Esp. Ing. Manuel Luis Zambrano Echenique
Jefe del Departamento de Ingeniería Civil	Ing. Fernando Javier Albarracín
Jefe del Departamento de Ingeniería en Informática	Mg. Lic. Lorena Talamé
Jefe del Departamento de Ingeniería en Telecomunicaciones	Ing. Roberto Daniel Breslin
Jefe de Carrera Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo	Lic. Néstor Alberto Valdiviezo
Coordinadora de Carrera Licenciatura Higiene y Seguridad Seguridad en el Trabajo	Esp. Ing. María Eugenia Soria
Coordinador Académico del Sistema de Educación a Distancia	Dr. Ing. Rafael F. Visa
Coordinador de Laboratorios	Esp. Ing. Myriam Cecilia Botelli

### EUCASA

Ediciones Universidad Católica de Salta

Directora	Lic. Rosanna Caramella
Comercialización	Lic. Mariana Remaggi

## Sumario

### Editorial

Rosanna Caramella y Lía Orosco

Determinación de parámetros para la conformación en caliente de una aleación metálica amorfa base Fe

*Determination of parameters for hot forming of an amorphous Fe based metal alloy*

Javier Alberto Moya y Carlos Berejnoi

Avances en las aleaciones magnéticas blandas

*Advances in soft magnetic alloys*

Diego Lisandro Rincón

Análisis del comportamiento del error global en los métodos explícitos de Runge- Kutta

*Global error behavior analysis in the explicit Runge-Kutta methods*

Carlos Marcelo Albarracín y María Virginia Quintana

Caudales de diseño en cuencas de la Provincia de Salta.

*Design flow discharges in basins of the province of Salta*

Cecilia Botelli, Nicolás Guillén y Matías Eder

The quartile functions for the Generalized Gutenberg-Richter distribution

*Funciones de cuartiles para la función distribución generalizada de Gutenberg-Richter*

Mika Haarala y Petrus Vermeulen