

## Problemas de difusión no lineal. Existencia y unicidad de la solución

### Nonlinear diffusion problems. Existence and uniqueness of the solution

Carlos Marcelo Albarracín<sup>1</sup>

---

*Métodos Numéricos en Ingeniería/  
artículo científico*

Citar: Albarracín, C. M. (2024).  
Problemas de difusión no lineal.  
Existencia y unicidad de la solución.  
*Cuadernos de Ingeniería* (15).  
<http://revistas.ucasal.edu.ar>

*Recibido: septiembre/2024*

*Aceptado: noviembre/2024*

---

#### Resumen

La ecuación diferencial del tipo elíptica es el modelo matemático de los problemas de difusión en estado estacionario. En ciertos casos de interés en ingeniería, el coeficiente de difusión puede ser no constante, por ejemplo, dependiente de la concentración o temperatura. Los coeficientes de difusión en polímeros de alta densidad se parecen al de los líquidos más que al de los sólidos. El valor de estos coeficientes varía fuertemente con la concentración, y se produce cuando una pequeña cantidad de soluto diluido difunde en un polímero solvente concentrado, como por ejemplo en los procesos de desvolatilización; es decir, la eliminación de solventes y monómeros que no han reaccionado con polímeros de uso comercial. En el caso de polímeros con aplicaciones en consumo, como envoltorios de alimentos, las especies volátiles pueden no ser benignas, por lo que la difusión es fundamental para el secado de recubrimientos a base de solventes. Es destacable mencionar que ciertas sustancias como el agua presentan difusividad dependiente de la concentración cuando difunden en un polímero. En Cussler (2009) se explica detalladamente este tipo de fenómeno. Una importante área que actualmente es muy relevante desde el punto de vista tecnológico es el proceso de difusión de iones de litio en baterías, un fenómeno que también resulta no lineal. En Popov et al. (2010) se resuelve numéricamente este tipo de proceso. En estos casos los problemas de contorno resultan ser no lineales. Su solución analítica por lo general es compleja y muy laboriosa de obtener. Por otra parte, lo más importante antes de abordar la resolución de este tipo de problemas es determinar la existencia de la solución y, en tal caso, las condiciones bajo las cuales es posible asegurar su unicidad. El presente trabajo es una aplicación concreta del análisis funcional. A partir de la formulación débil del problema de contorno, base teórica del método de los elementos finitos y necesaria para su implementación en computadora, se demuestra la continuidad y coercividad de la forma no

---

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina.

lineal asociada al problema de contorno. Con estos resultados se establece el espacio de Sobolev al que pertenece la solución y se determinan sus condiciones de existencia y unicidad. Por último, se validan resultados numéricos obtenidos mediante el método de los elementos finitos, comparando con soluciones disponibles en la bibliografía y restringiendo el estudio al caso de problemas en  $\mathbb{R}^1$ .

**Palabras clave:** difusión, no lineal, Sobolev.

### Abstract

The elliptic-type differential equation serves as the mathematical model for steady-state diffusion problems. In certain engineering applications, the diffusion coefficient may not be constant; for example, it may depend on concentration or temperature. The diffusion coefficients in high-density polymers are more similar to those in liquids than in solids. These coefficient values vary significantly with concentration, especially when a small amount of diluted solute diffuses within a concentrated solvent polymer, as seen in processes such as devolatilization, which involves the removal of solvents and unreacted monomers from commercial-grade polymers. In consumer applications of polymers, like food packaging, volatile species may not be benign, making diffusion critical for the drying of solvent-based coat-

ings. Notably, certain substances, like water, exhibit concentration-dependent diffusivity when diffusing in a polymer. Cussler (2009) provides a detailed explanation of this phenomenon. An important area of current technological interest is the diffusion of lithium ions in batteries, a non-linear process as well. Popov et al. (2010) solve this type of process numerically. In these cases, boundary problems tend to be non-linear. Their analytical solutions are generally complex and labor-intensive to derive. Moreover, before attempting to solve such problems, it is essential to determine the existence of a solution and, if possible, the conditions that ensure its uniqueness. This work provides a concrete application of functional analysis. Based on the weak formulation of the boundary problem, the theoretical foundation of the finite element method, and necessary for its implementation on computers, we demonstrate the continuity and coercivity of the nonlinear form associated with the boundary problem. These results establish the Sobolev space to which the solution belongs, and the conditions for its existence and uniqueness are determined. Finally, numerical results obtained through the finite element method are validated by comparison with solutions available in the literature, focusing the study on the case of problems in  $\mathbb{R}^1$ .

**Keywords:** diffusion, nonlinear, Sobolev.

---

## 1. Introducción

Los coeficientes de difusión en polímeros de alta densidad se parecen al de los líquidos más que al de los sólidos. El valor de estos coeficientes varía fuertemente con la concentración, lo que se produce cuando una pequeña cantidad de soluto diluido difunde en un polímero solvente concentrado. Esto es de interés dado que este problema tiene un considerable valor práctico como, por ejemplo, en los procesos de desvolatilización; es decir, la eliminación de solventes y monómeros que no han reaccionado con polímeros de uso comercial. En el caso de polímeros con aplicaciones en consumo, como envoltorios de alimentos, las especies volátiles pueden no ser benignas. La difusión es fundamental para el secado de recubrimientos a base de solventes. La rápida evaporación del solvente de la superficie de la capa de recubrimiento puede producir una piel de polímero concentrado. La difusión lenta a través de esta piel limita el secado del recubrimiento. Han y Akcasu (1981) estudiaron en

polímeros en forma experimental, la dependencia del coeficiente de difusión con la concentración. Es destacable mencionar que ciertas sustancias, como el agua, presentan difusividad dependiente de la concentración cuando difunden en un polímero. En Cussler (2009) se explica detalladamente este tipo de fenómeno. Una importante área que actualmente es muy relevante desde el punto de vista tecnológico es el proceso de difusión de iones de litio en baterías, un fenómeno que también resulta no lineal. Popov et al. (2010) utilizan el método de los volúmenes finitos para resolver numéricamente este tipo de proceso. Por otra parte, desde el punto de vista matemático, la bibliografía de análisis funcional lineal y no lineal disponible para el estudio de ecuaciones diferenciales es muy vasta.

## 2. Problema de contorno

El modelo matemático más utilizado para describir fenómenos de difusión en estado estacionario a través de una membrana delgada es la ley de Fick. La ecuación diferencial para considerar es de tipo elíptica y para el caso de un coeficiente de difusión dependiente de la concentración es

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left[ D(\bar{c}) \frac{d\bar{c}}{d\bar{x}} \right] = 0, \forall \bar{x} \in \hat{\Omega} = (0, l) \subset R \quad (1)$$

siendo  $\bar{c} = \bar{c}(\bar{x})$  la concentración del soluto. Una expresión general que permite considerar diversos coeficientes de difusión no constantes es la siguiente:

$$D(\bar{c}) = D_0[1 + f(\bar{c})] \quad (2)$$

en donde se asume que la función  $f(\bar{c})$  es continua en  $\hat{\Omega}$ . Al considerar las condiciones de contorno  $\bar{c}(0) = C_0$  y  $\bar{c}(l) = C_1$ , con  $C_0, C_1 \in R$ ,  $C_0 > 0$  y  $C_0 > C_1$ , se tiene el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} \frac{dD(\bar{c})}{d\bar{x}} \frac{d\bar{c}}{d\bar{x}} + D(\bar{c}) \frac{d^2\bar{c}}{d\bar{x}^2} = 0, \forall \bar{x} \in \hat{\Omega}, \\ \bar{c}(0) = C_0, \bar{c}(l) = C_1. \end{cases} \quad (3)$$

La introducción de las variables adimensionales  $c = \frac{\bar{c}}{C_0}$  y  $x = \frac{\bar{x}}{l}$ , en el problema de contorno (3) conduce a

$$\begin{cases} \frac{dD(c)}{dc} \left( \frac{dc}{dx} \right)^2 + D(c) \frac{d^2c}{dx^2} = 0, \forall x \in \Omega = (0,1), \\ c(0) = 1, c(1) = C_1/C_0 \end{cases} \quad (4)$$

a partir del cual se obtiene el operador cuasi-lineal

$$A = D_0 \left[ f'(\cdot) \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + (1 + f(\cdot)) \frac{d^2}{dx^2} \right] \quad (5)$$

### 3. Análisis de la formulación débil

Con el propósito de simplificar el estudio, inicialmente se propone  $c(0) = c(1) = 0$ . Al asumir  $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  y aplicar el procedimiento habitual para derivar la formulación débil, como por ejemplo en Daya Reddy (1998), Quarteroni y Valli (2008) o Atkinson y Han (2009), se tiene:

$$\int_0^1 f'(c)[c'(x)]^2 v(x) dx + \int_0^1 c''(x)v(x) dx + \int_0^1 f(c)c''(x)v(x) dx = 0 \quad (6)$$

Al aplicar integración por partes en las dos últimas integrales y posteriormente operar algebraicamente se obtiene:

$$a(c, v) = \int_0^1 c'(x)v'(x) dx + \int_0^1 f(c)c'(x)v'(x) dx = 0 \quad (7)$$

La forma no lineal resultante  $a(c, v)$  presenta una componente lineal:

$$a_L(c, v) = \int_0^1 c'(x)v'(x) dx \quad (8)$$

y una no lineal que está dada por

$$a_N(c, v) = \int_0^1 f(c)c'(x)v'(x) dx \quad (9)$$

Si se asume que las funciones  $c$  y  $v$  pertenecen al mismo espacio  $V(\Omega)$ , entonces la formulación débil se lee:

Encontrar la función  $c(x) \in V(\Omega)$  tal que  $c$  satisfaga (7) para toda  $v$  perteneciente a  $V(\Omega)$ .

Por otra parte, del análisis funcional lineal se sabe que  $a_L$  es continua y V-elíptica en el espacio de Sobolev  $W^{1,2}(\Omega)$ .

#### 3.1 Continuidad de $a$

La no linealidad de  $a_N$  está dada por la función  $f$ . Si  $f \in C(\Omega)$  y además satisface la condición de crecimiento y de Caratheodory, entonces, de acuerdo con Zeidler (1990), se puede definir el operador de Nemytskii  $F$ , tal que  $Fc = f(x, c)$ , para el cual la norma  $\|Fc\|_{L^2}$  está acotada. La aplicación de la desigualdad generalizada de Hölder para integrales en (9) conduce a

$$|a_N(c, v)| \leq \|Fc\|_{L^2(\Omega)} \|c'\|_{L^4(\Omega)} \|v'\|_{L^4(\Omega)} \quad (10)$$

Esta desigualdad no se altera si se suman las normas  $L^4(\Omega)$  de  $c$  y  $v$  para obtener:

$$|a_N(c, v)| \leq \|Fc\|_{L^2(\Omega)} \|c'\|_{L^4(\Omega)} \|v'\|_{L^4(\Omega)} + \|c\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \quad (11)$$

Al adoptar la constante  $K_N = \max\{\|Fc\|_{L^2(\Omega)}, 1\}$  y aplicar la desigualdad de Hölder para sumas, de (11) resulta:

$$|a_N(c, v)| \leq K_N (\|c\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|c'\|_{L^4(\Omega)}^4)^{1/4} (\|v\|_{L^4(\Omega)}^4 + \|v'\|_{L^4(\Omega)}^4)^{1/4} \quad (12)$$

Esta última desigualdad se puede expresar en términos de la norma del espacio  $W^{1,4}(\Omega)$ :

$$|a_N(c, v)| \leq K_N \|c\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)} \quad (13)$$

Por otra parte, al ser  $a = a_L + a_N$  se tiene:

$$|a(c, v)| \leq |a_L(c, v)| + |a_N(c, v)| \quad (14)$$

Dado que la forma bilineal  $a_L$  satisface  $|a_L(c, v)| \leq K_L \|c\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ , con  $K_L > 0$ , resulta:

$$|a(c, v)| \leq K_L \|c\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} + K_N \|c\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)} \quad (15)$$

De acuerdo con Böhmer (2010), el espacio  $W^{1,4}(\Omega)$  es una inmersión continua en  $W^{1,2}(\Omega)$ ; por lo tanto, existe una constante  $C_2 > 0$ , tal que  $\|\bullet\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C_2 \|\bullet\|_{W^{1,4}(\Omega)}$ . A partir del reemplazo de esta en la desigualdad (15) se obtiene:

$$|a(c, v)| \leq C_2 \|c\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)} + K_N \|c\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)} \quad (16)$$

Ahora, al adoptar la constante  $M = C_2 + K_N$ , la desigualdad (16) se puede expresar como

$$|a(c, v)| \leq M \|c\|_{W^{1,4}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)} \quad (17)$$

quedando demostrada la continuidad de  $a$  en el espacio  $W^{1,4}(\Omega)$ .

### 3.2 Coercividad de $a$

La expresión (9) permite plantear:

$$a_N(v, v) = \int_0^1 f(v)v'(x)v'(x)dx \quad (18)$$

en donde nuevamente es posible introducir el operador de Nemytskii  $F$ . A partir de la desigualdad invertida de Hölder (Mitrinović, 1970), para  $a_N(v, v)$  se obtiene la siguiente expresión:

$$C_3 \int_{\Omega} f(v)v'(x)v'(x)dx \geq \left[ \int_{\Omega} (f(v))^2 dx \right]^{1/2} \left[ \int_{\Omega} (v')^4 dx \right]^{1/4} \left[ \int_{\Omega} (v')^4 dx \right]^{1/4} \quad (19)$$

con  $0 < C_3 \in R$ . Si se suma en ambos miembros de la desigualdad (19) el término  $\|Fv\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)}$ , esta se puede expresar como

$$C_3 a_N(v, v) + \|Fv\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \geq \|Fv\|_{L^2(\Omega)}(\|v'\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)} + \|v\|_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^4(\Omega)}) \quad (20)$$

Al introducir la constante  $\gamma = \frac{\|Fv\|_{L^2(\Omega)}}{C_3} \geq 0$  se obtiene:

$$a_N(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \geq \gamma\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \quad (21)$$

Por otra parte, de la expresión (7) se tiene  $a(v, v) = a_L(v, v) + a_N(v, v)$ , por lo que se puede escribir:

$$a(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 = a_L(v, v) + a_N(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \quad (22)$$

De la desigualdad (21) y teniendo presente que la forma bilineal  $a_L$  es V-elíptica, es decir  $a_L(v, v) \geq \alpha_L\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2$ , (Daya Reddy, 1998), la igualdad (22) resulta en la siguiente desigualdad:

$$a(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \geq \alpha_L\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \gamma\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \quad (23)$$

Teniendo presente la inmersión continua del espacio  $W^{1,4}(\Omega)$  en el espacio  $W^{1,2}(\Omega)$  se tiene  $C_2^2\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \geq \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2$ . Multiplicando ambos miembros por  $\alpha_L$  y luego sumando  $\gamma\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2$  se obtiene:

$$(\alpha_L C_2^2 + \gamma)\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \geq \alpha_L\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \gamma\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \quad (24)$$

La resta de la desigualdad (24) de la (23) conduce a

$$a(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 - (\alpha_L C_2^2 + \gamma)\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2 \geq 0 \quad (25)$$

En consecuencia, debe existir una constante  $\alpha \in R$  tal que  $0 < \alpha \leq \alpha_L C_2^2 + \gamma$ , por lo que la (25) es en realidad la desigualdad de Gårding (Simader, 1972), esto es,

$$a(v, v) + \gamma\|v\|_{L^4(\Omega)}^2 \geq \alpha\|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2, \forall v \in V(\Omega) \quad (26)$$

### 3.3 Existencia de la solución $c$

A partir del resultado obtenido con la desigualdad (17), y considerando las condiciones de contorno originales, se puede plantear la formulación débil del problema (4) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } c \in V(\Omega), \text{ tal que:} \\ a(c, v) = a_L(c, v) + a_N(c, v) = 0, \\ \forall v \in V(\Omega) \end{cases} \quad (27)$$

en donde:

$$V(\Omega) = \{v \in W^{1,4}(\Omega); v(0) = 1, v(1) = C_1/C_0\} \quad (28)$$

### 3.4 Unicidad de la solución $c$

Demostrada la continuidad de  $a(c, v)$ , para demostrar la unicidad de la solución, es preciso recurrir a la desigualdad (26). Al adoptar  $\gamma = 0$ , la suma de  $a_L$  y  $a_N$  resulta:

$$\int_{\Omega} [1 + f(v)]v'(x)v'(x)dx \geq \alpha \|v\|_{W^{1,4}(\Omega)}^2, \forall v \in V(\Omega) \quad (29)$$

Dado que  $\alpha > 0$ , tiene que ser

$$\int_{\Omega} [1 + f(v)]v'(x)v'(x)dx \geq 0 \quad (30)$$

En particular, esta desigualdad se debe satisfacer para  $v = c$ , por lo que resulta:

$$\int_{\Omega} [1 + f(c)][c'(x)]^2 dx \geq 0 \quad (31)$$

En los procesos de difusión, tales como el propuesto en el presente trabajo, la concentración en el dominio  $\Omega$  nunca será mayor que el valor máximo dado en el contorno, por ello se puede asumir que la solución  $c$  verifica  $c \leq 1, \forall x \in \Omega$ . De esta manera, la expresión (31) se puede escribir como sigue:

$$[1 + f(1)] \int_{\Omega} [c'(x)]^2 dx \geq 0 \quad (32)$$

Dado que la integral siempre será mayor o igual a cero, para que la desigualdad (32) se cumpla, deberá ser

$$1 + f(1) \geq 0 \quad (33)$$

Es decir, el problema (27) tendrá solución única cuando la función  $f$  sea tal que:

$$f(1) \geq -1 \quad (34)$$

#### 4. Solución débil aproximada

La solución de la formulación débil (27) se puede determinar en forma aproximada por medio de algún método numérico. En el presente trabajo se aplicó el método de los elementos finitos, empleando elementos de dos nodos con funciones de forma dadas por

$$N_1^e(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}, N_2^e(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \quad (35)$$

para  $e = 1, 2, \dots, M$ , siendo  $M$  la cantidad de elementos con los que se discretiza el dominio  $\Omega$ . Si se denota con  $c_h(x)$  a la solución aproximada del problema (27), perteneciente al espacio de dimensión finita  $V^h(\Omega) \subset V(\Omega)$ , es decir un espacio de elementos finitos, por cada elemento se tendrá:

$$c_h|_{\Omega_e} = \sum_{j=1}^2 C_j N_j^e(x) \quad (36)$$

$$v_h|_{\Omega_e} = \sum_{i=1}^2 d_i N_i^e(x) \quad (37)$$

en donde  $C_j$  es el valor de la concentración en cada nodo del elemento y las  $d_i$  constantes arbitrarias. Al adoptar la numeración global de nodos, cada elemento finito contribuye al sistema de ecuaciones no lineales resultante con los siguientes términos:

$$[a_L^e(N_1^e, N_1^e) + a_N^e(f(c_h|_{\Omega_e})N_1^e, N_1^e)]C_e + [a_L^e(N_2^e, N_1^e) + a_N^e(f(c_h|_{\Omega_e})N_2^e, N_1^e)]C_{e+1} = 0 \quad (38)$$

$$[a_L^e(N_1^e, N_2^e) + a_N^e(f(c_h|_{\Omega_e})N_1^e, N_2^e)]C_e + [a_L^e(N_2^e, N_2^e) + a_N^e(f(c_h|_{\Omega_e})N_2^e, N_2^e)]C_{e+1} = 0 \quad (39)$$

en donde se tiene:

$$a_L^e(N_j^e, N_i^e) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} N_j^{e'} N_i^{e'} dx, \quad j, i = 1, 2 \quad (40)$$

$$a_N^e(f(c_h|_{\Omega_e})N_j^e, N_i^e) = \int_{x_e}^{x_{e+1}} f(c_h|_{\Omega_e})N_j^e N_i^e dx, \quad j, i = 1, 2 \quad (41)$$

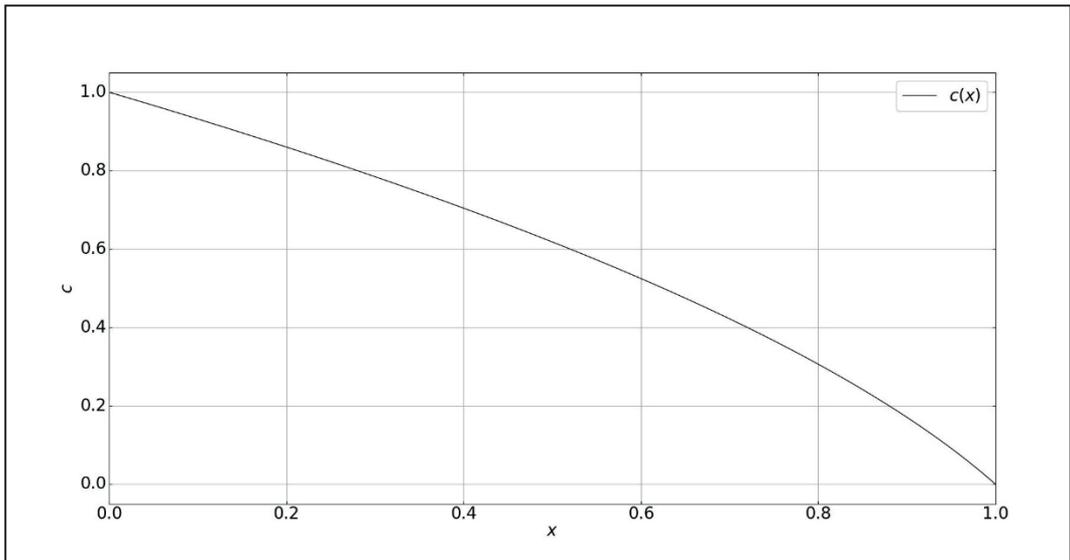
$$f(c_h|_{\Omega_e}) = f(\sum_{k=1}^2 C_{e+k-1} N_k^e) \quad (42)$$

El sistema no lineal completo está conformado por un total de  $M + 1$  ecuaciones, el cual fue resuelto por medio del método de Newton. El experimento numérico se realizó con cuatro funciones  $f$ : a)  $f(c) = 2c$ , b)  $f(c) = -c^{1/4}$ , c)  $f(c) = e^{4c}$  y d)  $f(c) = \sqrt{c} - 1.5c^2$ . En todos los casos

se utilizaron 100 elementos finitos y se efectuaron 10 iteraciones para el método de Newton. En las tablas que se muestran a continuación, se comparan valores obtenidos con los que resultan de evaluar las expresiones propuestas por Crank (1975). Se puede observar que presentan total concordancia en todos los dígitos significativos mostrados, salvo en el caso b, que en  $x = 0.2$ , los valores difieren en el quinto y sexto dígito significativo y en  $x = 0.3$ , que muestra una diferencia en el sexto. Las figuras 1 a 4 corresponden a los gráficos de las soluciones para los cuatro casos analizados.

**Tabla 1.** Solución  $c(x)$  para diferentes valores de  $x$  para  $f(c) = 2c$

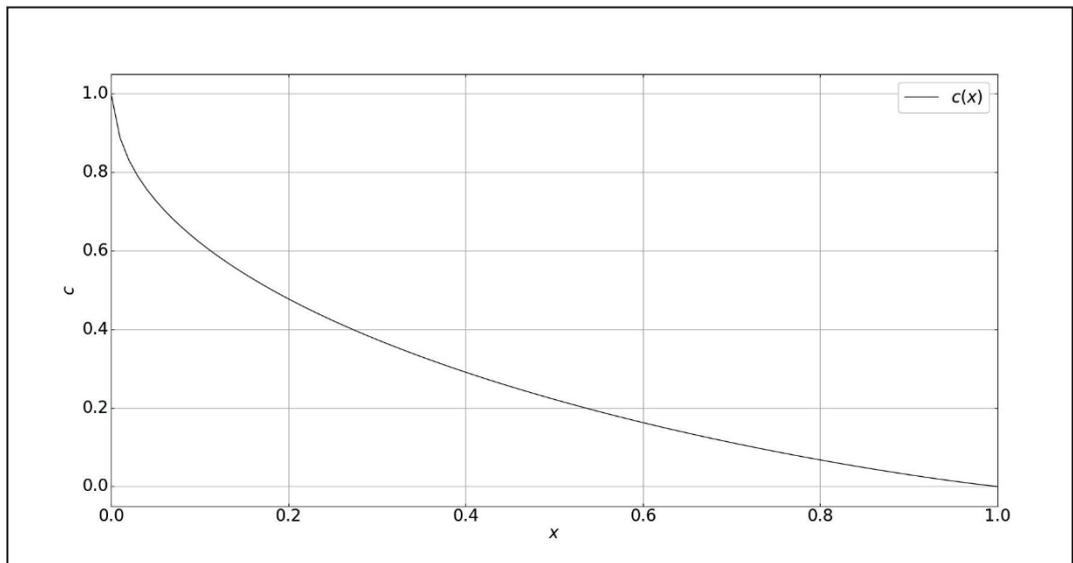
$x$	PRESENTE TRABAJO	CRANK
0.2	0.860147	0.860147
0.3	0.784523	0.784523
0.4	0.707159	0.707159
0.5	0.618034	0.618034
0.6	0.524695	0.524695
0.7	0.421954	0.421954
0.8	0.306226	0.306226



**Figura 1.** Gráfico de  $c(x)$  para  $f(c) = 2c$

**Tabla 2.** Solución  $c(x)$  para diferentes valores de  $x$  para  $f(c) = -c^{1/4}$

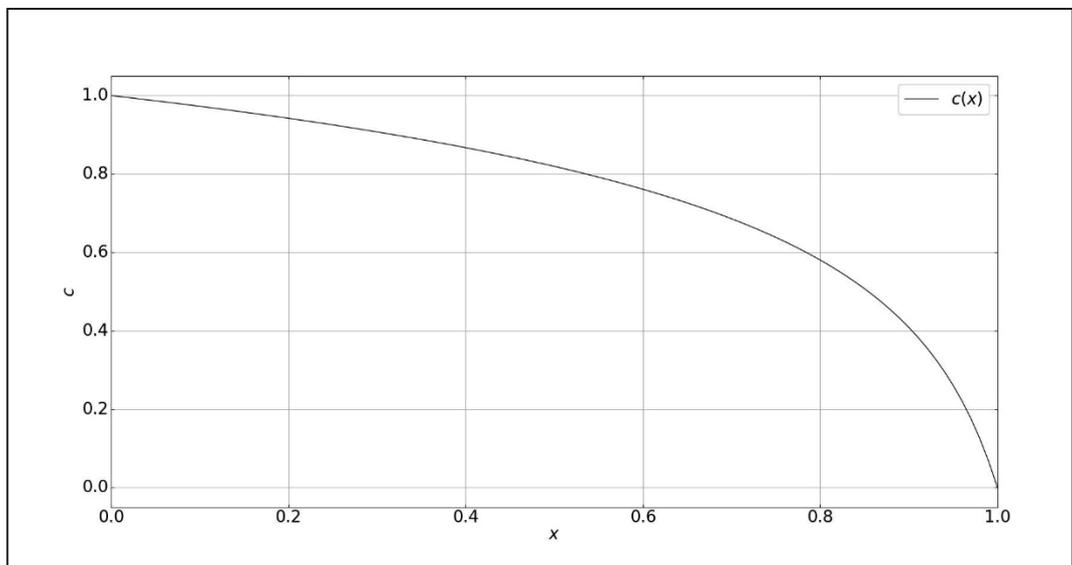
$x$	PRESENTE TRABAJO	CRANK
0.2	0.477785	0.477773
0.3	0.373911	0.373910
0.4	0.290941	0.290941
0.5	0.221706	0.221706
0.6	0.162606	0.162606
0.7	0.111606	0.111606
0.8	0.067550	0.067550



**Figura 2.** Gráfico de  $c(x)$  para  $f(c) = -c^{1/4}$

**Tabla 3.** Solución  $c(x)$  para diferentes valores de  $x$  para  $f(c) = e^{4c}$

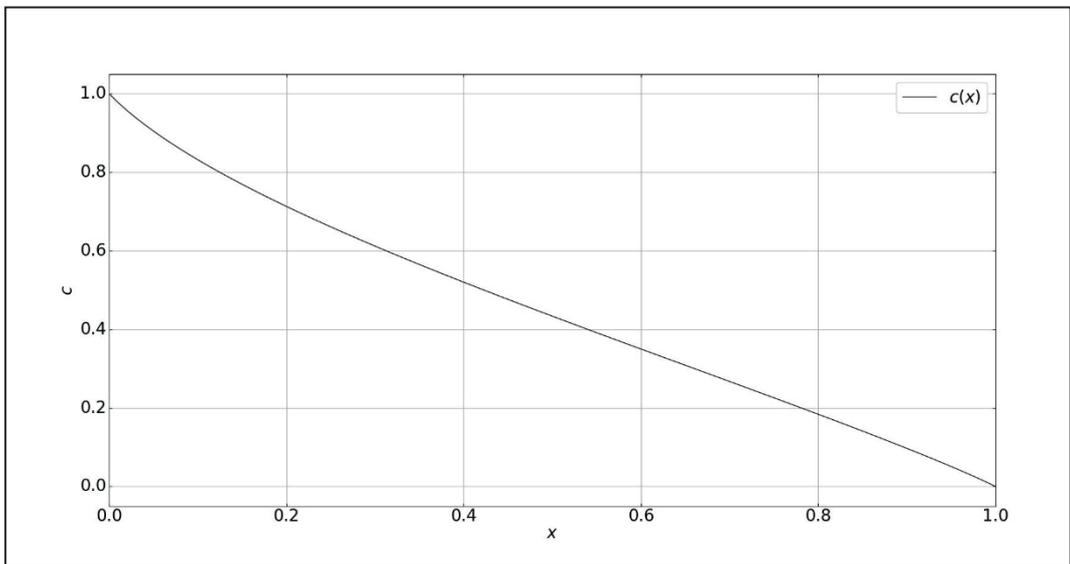
$x$	PRESENTE TRABAJO	CRANK
0.2	0.942097	0.942097
0.3	0.907344	0.907344
0.4	0.867139	0.867139
0.5	0.819485	0.819485
0.6	0.761071	0.761071
0.7	0.685794	0.685794
0.8	0.580535	0.580535



**Figura 3.** Gráfico de  $c(x)$  para  $f(c) = e^{4c}$

**Tabla 4.** Solución  $c(x)$  para diferentes valores de  $x$  para  $f(c) = \sqrt{c} - 1.5c^2$

$x$	PRESENTE TRABAJO	CRANK
0.2	0.713184	0.713184
0.3	0.612079	0.612079
0.4	0.520243	0.520243
0.5	0.433708	0.433708
0.6	0.350044	0.350044
0.7	0.267384	0.267384
0.8	0.183877	0.183877



**Figura 4.** Gráfico de  $c(x)$  para  $f(c) = \sqrt{c} - 1.5c^2$

## 5. Conclusiones

El presente trabajo es un aporte al entendimiento de los conceptos matemáticos, de los modelos no lineales involucrados en los procesos de difusión. Con base en los principios teóricos aportados por el análisis funcional, para el caso de problemas de contorno como los dados por la expresión (4), se ha determinado el espacio al que pertenece la solución. También se logró demostrar la existencia y las condiciones de unicidad de la solución de la formulación débil (27). Adicionalmente, los resultados numéricos obtenidos por medio del método de los elementos finitos concuerdan muy satisfactoriamente con los publicados por Crank (1975). Las figuras 1, 2, 3 y 4 permiten apreciar con claridad el cambio en la distribución de la concentración cuando el coeficiente de difusión depende de esta.

## Referencias

- Atkinson, K. y Han, W. (2009). *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*. Springer.
- Böhmer, K. (2010). *Numerical method for nonlinear elliptic differential equations*. Oxford University Press Inc.
- Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion*. Oxford University Press.
- Cussler, E. L. (2009). *Diffusion. Mass Transfer in Fluid Systems*. Cambridge University Press.
- Daya Reddy, B. (1998). *Introductory Functional Analysis*. Springer-Verlag.
- Han, C. y Akcasu, A. Z. (1981). Concentration dependence of diffusion coefficient at various molecular weights and temperatures. *Polymer*, 22, 11651168.
- Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag.
- Popov, P., Vutov, Y., Margenov, S. e Iliev, O. (2010). *Finite volume Discretization of Equations describing Nonlinear Diffusion in Li-Ion batteries*. Berichte des Fraunhofer ITWM, (191).
- Quarteroni, A. y Valli, A. (2008). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag.
- Simader, C. G. (1972). *On Dirichlet's Boundary Value Problem. An  $L^p$ -Theory Based on a Generalization of Gårding's Inequality*. Springer-Verlag.
- Zeidler, E. (1990). *Non Linear Functional Analysis and its Applications. Part II/B*. Springer-Verlag.

Carlos Marcelo Albarracín

**Carlos Marcelo Albarracín**

**Perfil académico y profesional:** Ingeniero mecánico aeronáutico por la Universidad Nacional de Córdoba. Doctor en Ingeniería por la Universidad Nacional de Salta. Profesor adjunto en Análisis Numérico de Ingeniería Química en la Facultad de Ingeniería de la UNSa. Categoría III del Programa de Incentivos a los Docentes Investigadores.

Correo electrónico: [cmalbarracin@gmail.com](mailto:cmalbarracin@gmail.com)